# 1. समरूपता

**प्र.1.** एका त्रिकोणाचा पाया 9 आणि उंची 5 आहे. दुसऱ्या त्रिकोणाचा पाया 10 आणि उंची 6 आहे, तर त्या त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

**उत्तर :** समजा हा त्रिकोण असून, हा दुसरा त्रिकोण आहे. या त्रिकोणाची उंची व पाया अनुक्रमे $h_1$ व $b_1$ आहे. तसेच या त्रिकोणाची उंची व पाया अनुक्रमे $h_2$ व $b_2$ आहे.

येथे, $b_1 = 9$, $h_1 = 5$, $b_2 = 10$, व $h_2 = 6$.

दोन त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर हे त्या त्रिकोणाच्या संगतपाया व संगत ऊंची यांच्या गुणकारच्या गुणोत्तराएवढे असते.

$$\therefore \frac{A(\Delta_1)}{A(\Delta_2)} = \frac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$$

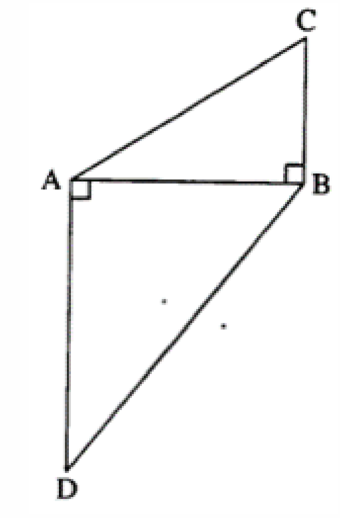
$$= \frac{9 \times 5}{10 \times 6}$$ ___(दिलेल्या किमती भरुन)

$$= \frac{3}{4}$$

त्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर $\frac{3}{4}$ आहे.

प्र. 2. दिलेल्या आकृतीमध्ये $BC \perp AB, AD \perp AB$. $BC = 4, AD = 8$; तर

$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$ काढा.




उत्तर : $\Delta ABC$ व $\Delta ADB$ या त्रिकोणांचा सामाईक पाया रेख AB आहे.

समान पायांच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत उंचीच्या प्रमाणात असतात.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)} = \frac{BC}{AD}$$

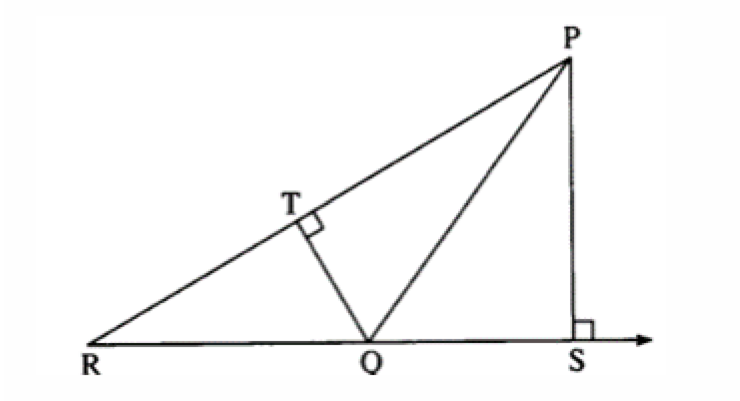
$$= \frac{4}{8}$$ ___(दिलेल्या किमती भरुन)

$$= \frac{1}{2}$$

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)} = \frac{1}{2}$$

प्र. 3. दिलेल्या आकृतीमध्ये रेख PS ⊥ रेख RQ , रेख QT ⊥ रेख PR. जर

RQ = 6, PS = 6, PR = 12 तर QT काढा.




उत्तर : R-Q-S ____(आकृतीवरुन)

$\Delta\, PQR$ मध्ये, रेख RQ हा पाया व रेख PS ही ऊंची घेतल्यास

$A(\Delta\, PQR) = \frac{1}{2} \times RQ \times PS$ .............(1)

तसेच, $\Delta\, PRQ$ मध्ये, रेख PR हा पाया व रेख QT ही ऊंची घेतल्यास,

$A(\Delta\, PRQ) = \frac{1}{2} \times PR \times QT$ ............(2)

$\therefore \frac{1}{2} \times RQ \times PS = \frac{1}{2} \times PR \times QT$ .....[ 1 व 2 वरून]

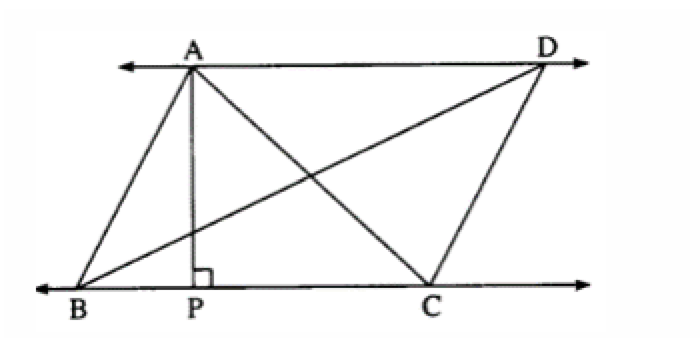
$\therefore RQ \times PS = PR \times QT$ ......(दोन्ही बाजूंना 2 ने गुणून)

$\therefore 6 \times 6 = 12 \times QT$ .....(दिलेल्या किमती भरून)

$QT = \frac{6\times6}{12}$

QT = 3 आहे

प्र. 4. दिलेल्या आकृतीत AP ⊥ BC, AD || BC, तर A( Δ ABC) : A( Δ BCD) काढा.




उत्तर : रेख AP ⊥ **रेख BC आणि रेख AD** || BC ... (दिले आहे)

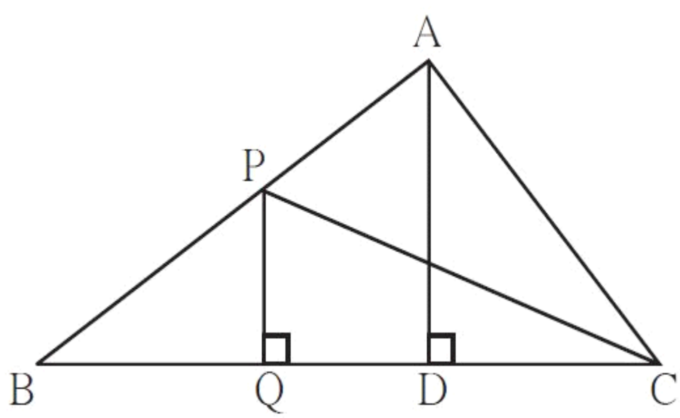
$\Delta ABC$ व Δ BCD या दोन त्रिकोणाचा पाया रेख BC हा सामाईक आहे. तसेच हे दोन त्रिकोण दोन समांतर रेषामध्ये बद्ध असल्यामुळे त्यांची ऊंची रेख AP ही देखील समान आहे.

$\therefore \frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, BCD)} = \frac{BC\times AP}{BC\times AP}$ .......(दोन्ही त्रिकोणाचा पाया व ऊंची समान)

$= \frac{1}{1}$

$A(\Delta\, ABC) : A(\Delta\, BCD) = 1:1$ आहे.

प्र.5 दिलेल्या आकृतीत, PQ ⊥ BC, AD ⊥ BC तर खालील गुणोत्तरे लिहा.




i) $\frac{A(\Delta\, PQB)}{A(\Delta\, PBC)}$ ii) $\frac{A(\Delta\, PBC)}{A(\Delta\, ABC)}$

iii) $\frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, ADC)}$ iv) $\frac{A(\Delta\, ADC)}{A(\Delta\, PQC)}$

उत्तर : i) $\Delta$ PQB व $\Delta$ PBC हे रेख BQ व रेख BC या एकरेषीय (B-Q-C) पायावर उभे आहेत. या दोन त्रिकोणाचा शिरोबिंदू P हा सामाईक असल्यामुळे’ हे समान उंचीचे त्रिकोण आहेत.

समान उंचीच्या त्रिकोणाची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायाच्या प्रमाणात असतात.

$$\frac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)} = \frac{BQ}{BC}$$

ii) $\Delta$ PBC व $\Delta$ ABC हे या दोन त्रिकोणांचा पाया रेख BC सामाईक आहे; परंतु उंची भिन्न भिन्न आहे.

सामाईक पायांच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत उंचीच्या प्रमाणात असतात.

$$\frac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)} = \frac{PQ}{AD}$$

iii) $\Delta$ ABC व $\Delta$ ADC या दोन त्रिकोणांची उंची रेख AD समान आहे व हे त्रिकोण रेख BC व रेख DC या एकरेषीय (B-D-C) पायांवर उभे आहेत.

समान उंचीच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत. पायांच्या प्रमाणात असतात.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BC}{DC}$$

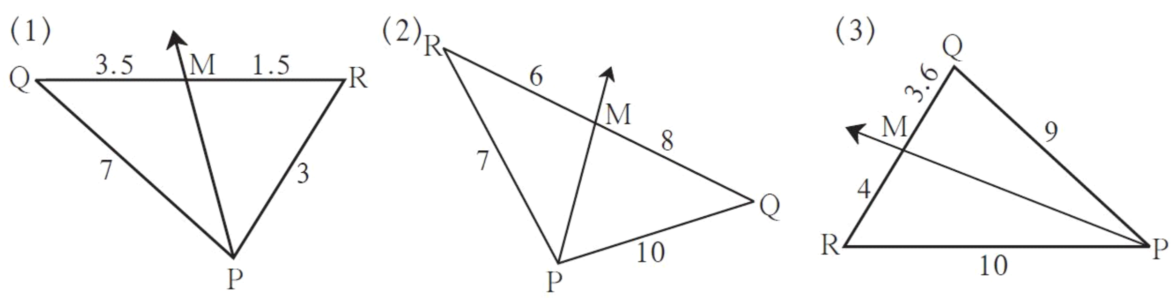
iv) $\Delta$ ADC मध्ये, पाया रेख DC व उंची रेख AD आहे.

$\Delta$ PQC मध्ये, पाया रेख QC व उंची रेख PQ आहे. दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्या त्रिकोणांच्या संगत पाया व संगत उंची यांच्या गुणाकारांच्या गुणोत्तराएवढे असते.

$$\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)} = \frac{DC \times AD}{QC \times PQ}$$

## सरावसंच 1.2

प्र.1 पुढे काही त्रिकोण आणि रेखाखंडांच्या लांबी दिल्या आहेत. त्यांवरून कोणत्या आकृतीत किरण PM हा ∠QPR चा दुभाजक आहे ते ओळखा.




उत्तर : (1) येथे, PR = 3, PQ = 7, QM = 3.5 व RM = 1.5

$\therefore \frac{PR}{PQ} = \frac{3}{7}$ .......(1)

व $\frac{RM}{QM} = \frac{1.5}{3.5} = \frac{15}{35}$

$\therefore \frac{RM}{QM} = \frac{3}{7}$ ...... (2)

$\therefore \frac{PR}{PQ} = \frac{RM}{QM}$ .....(1) व (2) वरून

∴ त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार,

Δ PQR च्या बाजू QR वर M बिंदू असा आहे की, $\frac{PR}{PQ} = \frac{RM}{QM}$

किरण PM हा $< QPR$ चा दुभाजक आहे.

(2) येथे, PQ = 10, PR = 7, RM = 6 व QM = 8.

$\frac{PR}{PQ} = \frac{7}{10}$ ....... (1)

व $\frac{RM}{QM} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ...... (2)

$\therefore \frac{PR}{PQ} \neq \frac{RM}{QM}$ .....(1) व (2) वरून

किरण PM हा $< QPR$ चा दुभाजक नाही.

(3) येथे, PQ = 9 , PR = 10, RM = 4 व QM = 3.6

$\frac{PR}{PQ} = \frac{10}{9}$ ....... (1)

व $\frac{RM}{QM} = \frac{4}{3.6} = \frac{40}{36} = \frac{10}{9}$ ...... (2)

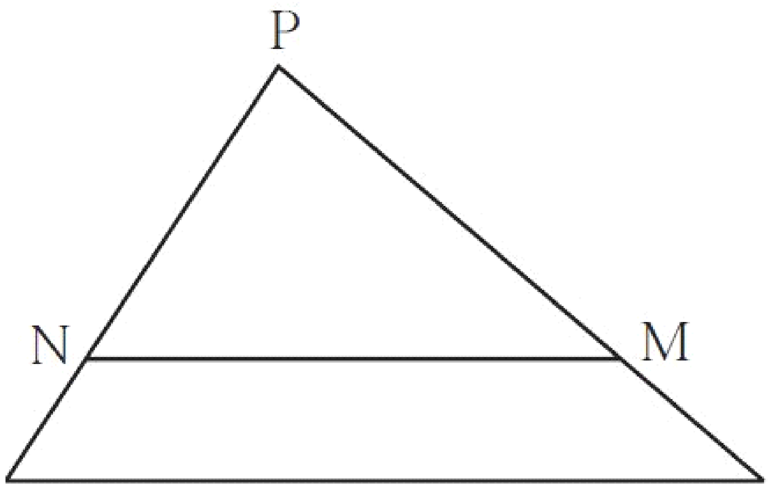
$\therefore \frac{PR}{PQ} = \frac{RM}{QM}$ .....(1) व (2) वरून

त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार,

$\Delta$ PQR च्या बाजू QR वर M बिंदू असा आहे की, $\frac{PR}{PQ} = \frac{RM}{QM}$

**किरण PM हा < QPR चा दुभाजक आहे.**

प्र.2 जर Δ PQR मध्ये PM = 15, PQ = 25, PR = 20, NR = 8 तर रेषा NM ही बाजू RQ ला समांतर आहे का? कारण लिहा.




उत्तर : PQ = PM + MQ .....(P-M-Q)

$\therefore 25 = 15 + MQ$

$\therefore MQ = 25 - 15 = 10$

तसेच, PR= PN + NR .....(P-N-R)

20 = PN + 8

$\therefore PN = 20 - 8 = 12$

आता, $\frac{PM}{MQ} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ ....... (1)

व $\frac{PN}{NR} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ ...... (2)

$\frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR}$ .....(1) व (2) वरून

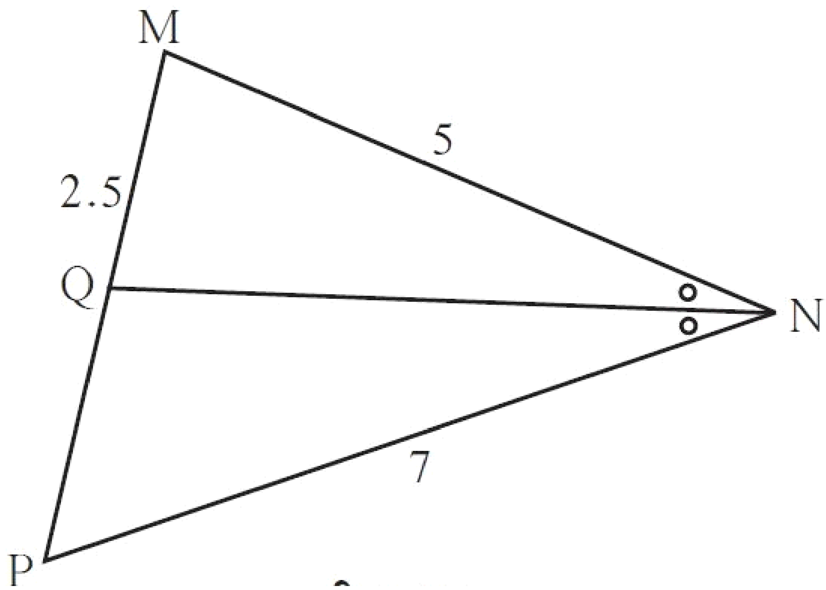
प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार,

रेषा NM || बाजू RQ

रेषा NM || बाजू RQ आहे.

प्र.3 Δ MNP च्या < N चा NQ हा दुभाजक आहे. जर MN = 5, PN = 7, MQ = 2.5 तर QP काढा.

उत्तर : Δ MNP च्या < N चा रेख NQ हा दुभाजक आहे. ____(दिले आहे)




त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या प्रमेयाच्यानुसार,

$$\frac{NM}{NP} = \frac{MQ}{QP}$$

$\therefore \frac{5}{7} = \frac{2.5}{QP}$ …… (दिलेल्या किमती भरून)

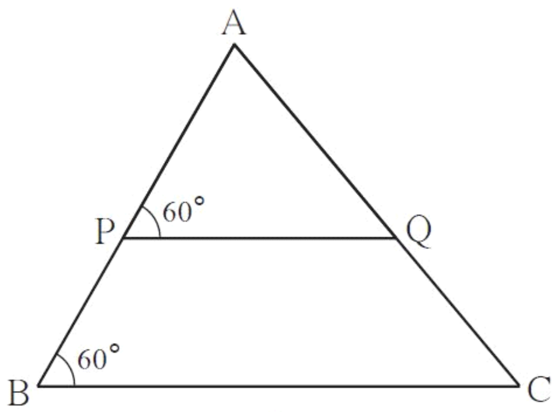
$$\therefore QP = \frac{2.5 \times 7}{5} = \frac{7 \times 25}{5 \times 10}$$

$$\therefore QP = \frac{7}{2} = 3.5$$

**QP 3.5 आहे.**

प्र.4 आकृतीत काही कोनांची मापे दिली आहेत त्यावरून दाखवा, की

$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ .




उत्तर : आकृतीवरून,

< APQ = 60° व < ABC = 60°

< APQ व < ABC हे छेदिका AB च्या एकाच अंगास असणारे संगत कोन आहेत.

∴ < APQ ≅ < ABC ... (प्रत्येकी 60° मापाचे)

∴ रेख PQ || रेख BC .....(संगत कोन कसोटीनुसार)

Δ ABC मध्ये ,

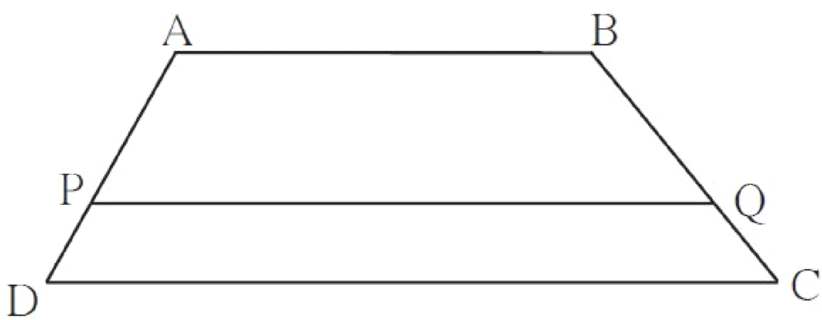
रेख PQ || बाजू BC ____(वर सिद्ध केले)

∴ प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार,

$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ .

प्र.5 समलंब चौकोन ABCD मध्ये, बाजू AB || बाजू PQ || बाजू DC, जर

AP = 15, PD = 12, QC = 14 तर BQ काढा.




उत्तर : ∴ ABCD या समलंब चौकोनात,

बाजू AB || बाजू PQ || बाजू DC ____(दिले आहे)

रेख AD व रेख BC या छेदिका.

तीन समांतर रेषा व त्यांच्या छेदिकांच्या गुणधर्मानुसार,

$\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$

$\therefore \frac{15}{12} = \frac{BQ}{14}$ ...... (दिलेल्या किमती भरून)

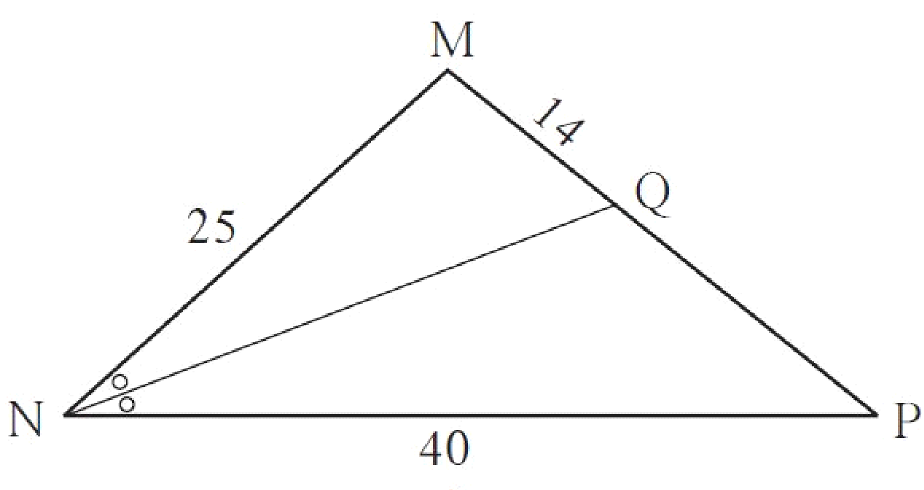
$\therefore \frac{15 \times 14}{12} = BQ$

$\therefore BQ = \frac{35}{2}$

$\therefore BQ = 17.5$

BQ = 17.5 आहे.

प्र.6 आकृतीमध्ये दिलेल्या माहितीवरून QP काढा.




उत्तर : आकृतीवरून $\Delta$ MNP च्या < MNP चा रेख NQ हा कोनदुभाजक आहे.

∴ त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या प्रमेयानुसार,

$\frac{MN}{NP} = \frac{MQ}{QP}$

$\frac{25}{40} = \frac{14}{QP}$ ....... (दिलेल्या किमती भरून)

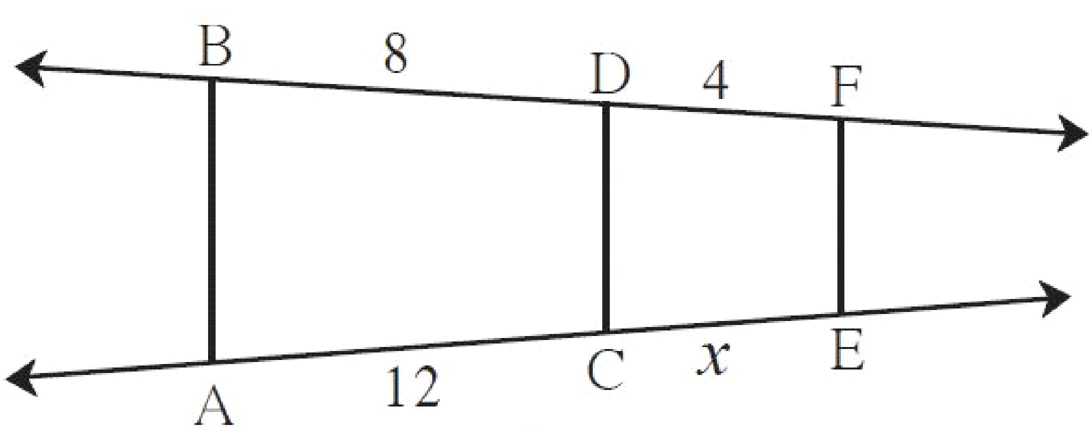
$\therefore QP = \frac{40\times14}{25}$

$\therefore QP = \frac{112}{5}$

$\therefore QP = 22.4$

**QP = 22.4 आहे.**

प्र.7 आकृती मध्ये जर AB || CD || FE तर x ची किमत काढा व AE काढा.



उत्तर : आकृतीमध्ये, AB || CD || EF.

रेख BF व रेख AE या छेदिका.

तीन समांतर रेषा व त्यांच्या छेदिकांच्या गुणधर्मानुसार,

$\frac{BD}{DF} = \frac{AC}{CE}$

$\therefore \frac{8}{4} = \frac{12}{CE}$ ....... (दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore CE = \frac{4 \times 12}{8} = \frac{48}{8} = 6 = x$

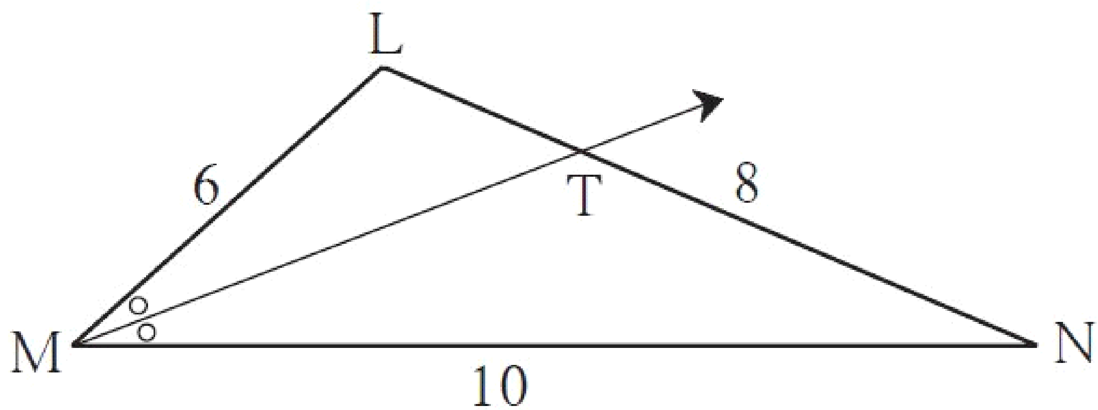
$\therefore x = 6$ .....(CE = X)

AE = AC + CE .....(A-C-E)

$\therefore AE = 12 + 6 = 18$

**x = 6 व AE = 18 आहे.**

प्र.8 Δ LMN मध्ये किरण MT हा < LMN चा दुभाजक आहे. जर LM = 6, MN = 10, TN = 8 तर LT काढा.




उत्तर :

Δ LMN मध्ये, < LMN चा किरण MT हा दुभाजक आहे.

∴ त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या प्रमेयानुसार,

$$\frac{LM}{MN} = \frac{LT}{NT}$$

$\therefore \frac{6}{10} = \frac{LT}{8}$ ....... (दिलेल्या किमती भरून)

$$\therefore LT = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{48}{10}$$

$$\therefore LT = 4.8$$

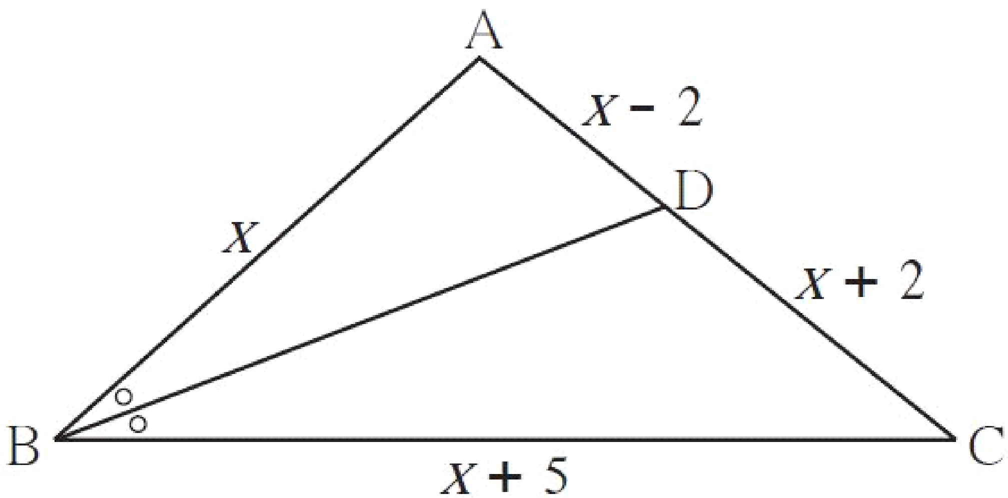
**<u>LT = 4.8 आहे.</u>**

प्र.9 Δ ABC मध्ये रेख BD हा < ABC चा दुभाजक आहे,

जर AB = x, BC = x + 5,

AD = x – 2, DC = x + 2

तर x ची किंमत काढा.




उत्तर : Δ ABC मध्ये < ABC चा रेख BD हा दुभाजक आहे.

∴ त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या प्रमेयानुसार,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

$\therefore \frac{x}{x+5} = \frac{x-2}{x+2}$ ....... (दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore x \times (x+2) = (x-2) \times (x+5)$

$\therefore\ x^2 + 2x = x^2 + 3x - 10$ ___(कंस सोडवून)

$\therefore 2x = 3x - 10$

$\therefore 10 = 3x - 2x$

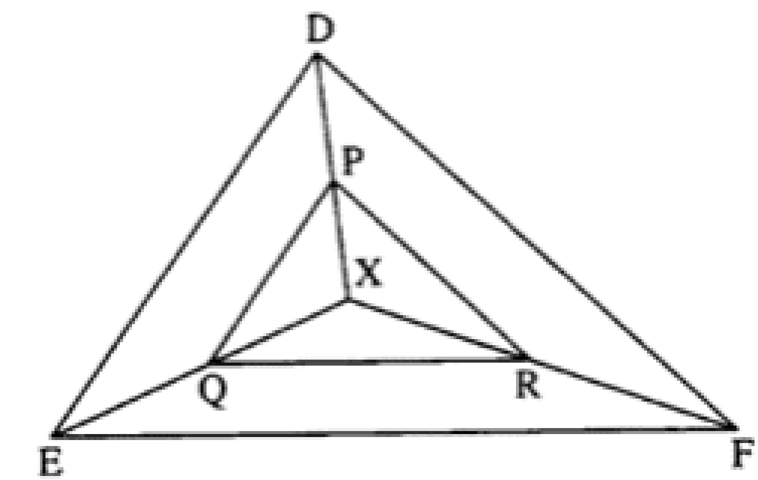
$\therefore x = 10$

प्र.10 शेजारील आकृतीमध्ये त्रिकोणाच्या अंतर् भागात X हा कोणताही एक बिंदू आहे. बिंदु X हा त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंशी जोडला आहे.

तसेच रेख PQ || रेख DE, रेख QR || रेख EF

तर रेख PR || रेख DF हे सिद्ध करण्यासाठी

खालील चौकटी पूर्ण करा



सिद्धता : Δ XDE मध्ये PQ || DE ___ $\square$

$\frac{XP}{\square} = \frac{\square}{QE}$ ....... (I) (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

Δ XEF मध्ये, QR || EF .......... $\square$

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ .....( $\square$ )......(2)

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ .....[1 व 2 वरून]

रेख PR || रेख DF .......... (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

उत्तर : Δ XDE मध्ये PQ || DE ___ $\boxed{\text{पक्ष}}$

$\frac{XP}{\boxed{PD}} = \frac{\boxed{XQ}}{QE}$ ....... (I) (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

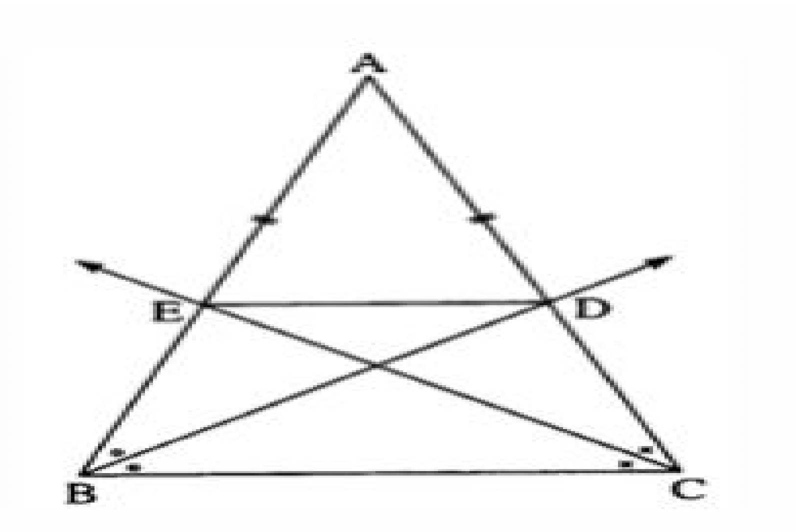
Δ XEF मध्ये, QR || EF .......... $\boxed{\text{पक्ष}}$

$\therefore \frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}} = \frac{\boxed{XQ}}{\boxed{QE}}$ .....( $\boxed{\text{प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयावरुन}}$ )......(2)

$\therefore \frac{\boxed{XP}}{\boxed{PD}} = \frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}}$ .....[1 व 2 वरून]

रेख PR || रेख DF .......... (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

प्र.11 Δ ABC मध्ये AB = AC, < B व < C चे दुभाजक बाजू AC व बाजू AB यांना अनुक्रमे बिंदू D व E मध्ये छेदतात. तर सिद्ध करा, की रेख ED || रेख BC.




उत्तर : Δ ABC मध्ये,

AB = AC ......दिले आहे (1)

Δ ABC मध्ये < $ABC$ चा किरण BD दुभाजक

∴ त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या गुणधर्मानुसार,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \quad ......(2)$$

तसेच, △ABC मध्ये, ∠ ABC चा किरण CE हा दुभाजक

त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या गुणधर्मानुसार,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AE}{BE} \quad .....(3)$$

परंतु, AB = AC .....(1 वरून)

$$\therefore \frac{AB}{CB} = \frac{AE}{BE}$$

म्हणजेच,

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AE}{BE} \quad .....(4)$$

आता,

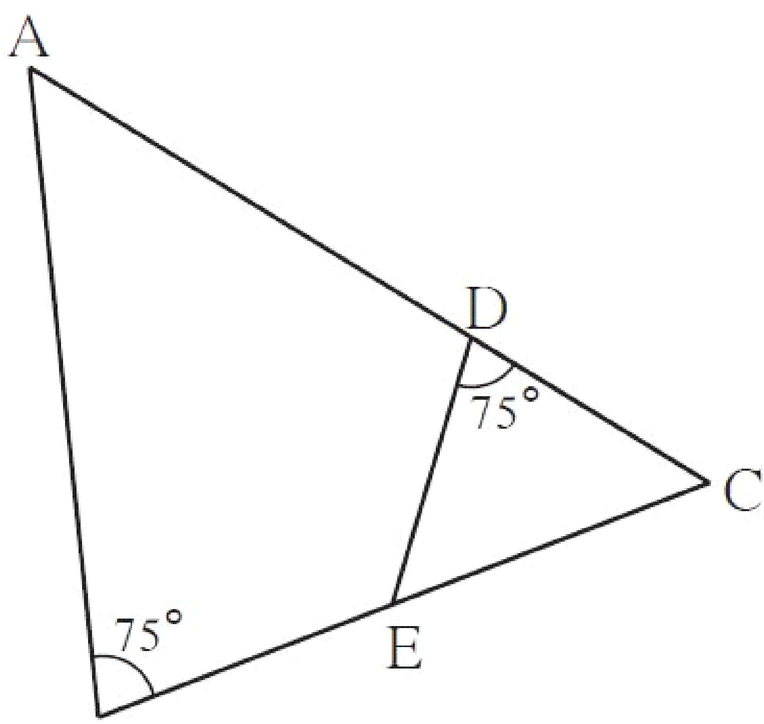
$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{DC} \quad ....(2) \text{ व } (4) \text{ वरून}$$

∴ प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार,

रेख ED || रेख BC.

# सरावसंच 1.3

प्र.1 आकृतीमध्ये $\angle ABC = 75°$, $\angle EDC = 75°$ तर कोणते दोन त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार समरूप आहेत? त्यांची समरूपता योग्य एकास एक संगतीत लिहा.




उत्तर : $\Delta ABC$ व $\Delta EDC$ मध्ये,

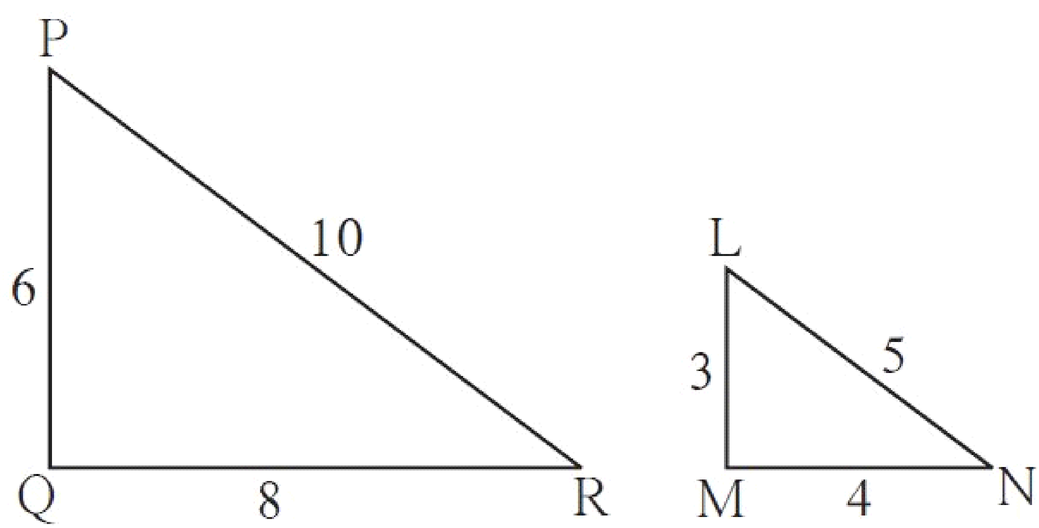
$\angle ABC \cong \angle EDC$ .......(प्रत्येकी 75° )

$\angle C \cong \angle C$ ........(सामाईक कोन)

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta EDC$ ....... (समरूपतेच्या कोको कसोटीनुसार)

आकृतीतील दोन त्रिकोण $\Delta ABC$ व $\Delta EDC$ हे समरूपतेच्या कोको कसोटीनुसार समरूप आहेत. $\Delta ABC \sim \Delta EDC$.

प्र.2 आकृतीमधील त्रिकोण समरूप आहेत का? असतील तर कोणत्या कसोटीनुसार ?




उत्तर : $\Delta PQR$ व $\Delta LMN$ मध्ये,

$\frac{PQ}{LM} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$ ......(1)

$\frac{QR}{MN} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$ ......(2)

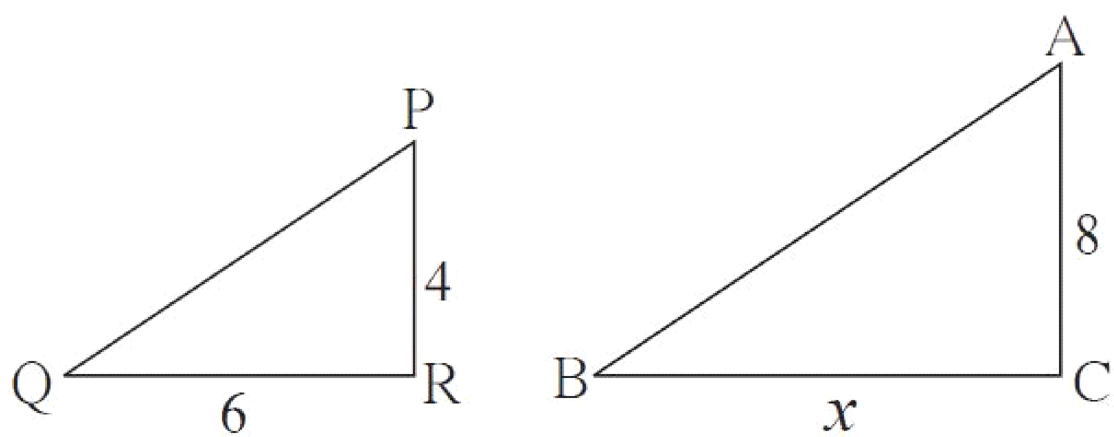
$\frac{PR}{LN} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$ ......(3)

$\therefore \frac{PQ}{LM} = \frac{QR}{MN} = \frac{PR}{LN}$ …… (1)(2)(3)वरून

∴ Δ PQR ~ Δ LMN ……….(समरूपतेच्या बाबाबा कसोटीनुसार)

आकृतीतील दोन त्रिकोण समरूपतेच्या बाबाबा कसोटीनुसार समरूप आहेत.

प्र.3 आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे 8 मीटर व 4 मीटर उंचीचे दोन खांब सपाट जमिनीवर उभे आहेत. सूर्य प्रकाशाने लहान खांबाची सावली 6 मीटर पडते, तर त्याच वेळी मोठ्या खांबाची सावली किती लांबीची असेल?




उत्तर : PQ हा 4 मीटर उंचीचा खांब असून, QR ही त्याची 6 मीटर लांबीची सावली आहे.

< PQR = 90°

तसेच, AB हा 8 मीटर उंचीचा खांब असून, BC ही त्याची सावली आहे.

$\angle ABC = 90°$

दोन्ही खांबांच्या सावल्या एकाच वेळी पडलेल्या आहेत.

$\therefore \angle QPR \cong \angle BAC$ ___(1)

$\Delta$ PQR व $\Delta$ ABC यांमध्ये,

$\angle PQR \cong \angle ABC$ ______(प्रत्येकी 90°)

$\angle QPR \cong \angle BAC$ ____ (1) वरून

$\therefore \Delta PQR \sim \Delta ABC$ ____(समरूपतेची कोको कसोटी)

$\therefore \frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC}$ ____(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

$\therefore \frac{4}{8} = \frac{6}{BC}$ ___(दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore BC = \frac{6 \times 8}{4}$

$\therefore BC = 12$ मीटर

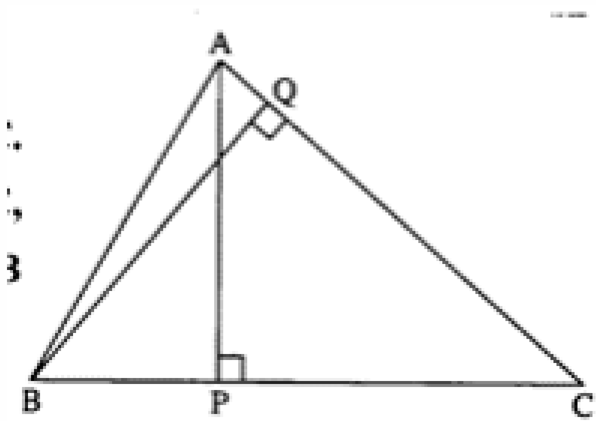
उत्तर : मोठ्या खांबाची सावली 12 मीटर लांबीची असेल.

4. Δ ABC मध्ये,

AP ⊥ $BC, BQ \perp AC. B-P-C,$

A-Q-C, तर Δ CPA ~ Δ CQB दाखवा.

जर AP = 7, BQ =8, BC = 12, तर AC काढा.




रीत : Δ CPA व Δ CQB मध्ये,

< CPA ≅ < CQB _____ (प्रत्येकी 90° मापाचे)

∴ < C ≅ < C _____ (सामाईक कोन)

∴ Δ CPA~ CQB _______ (समरूपतेची कोको कसोटी)

∴ $\frac{AP}{BQ} = \frac{AC}{BC}$ ___(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात.)

$\therefore \frac{7}{8} = \frac{AC}{12}$ ____(दिलेल्या किमती भरून)

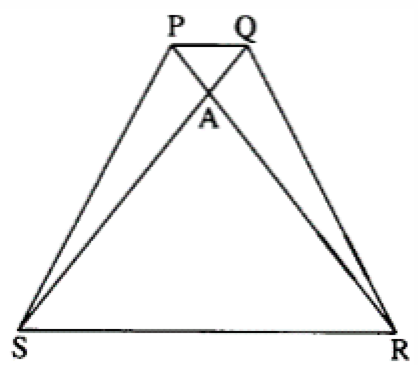
$\therefore AC = \frac{7 \times 12}{8} = \frac{21}{2}$

$\therefore AC = 10.5$

उत्तर : AC = 10.5 आहे.

5. आकृतीत, समलंब चौकोन PQRS मध्ये, बाजू PQ || बाजू SR. AR = 5AP, AS = 5AQ,

तर सिद्ध करा : SR = 5PQ.




सिद्धता : AR = 5AP व AS = 5AQ ____ (दिले आहे)

$\therefore \frac{AR}{AP} = \frac{5}{1}$ व $\frac{AS}{AQ} = \frac{5}{1}$ __(1)

$\therefore \frac{AR}{AP} = \frac{AS}{AQ}$ __(1 वरुन)__(2)

Δ ASR व Δ AQP मध्ये ,

$\frac{AR}{AP} = \frac{AS}{AQ}$ __(2 वरुन)

< SAR ≅ < QAP ______(विरुद्ध कोन)

∴ Δ ASR ~ Δ AQP ____(समरूपतेची बाकोबा कसोटी)

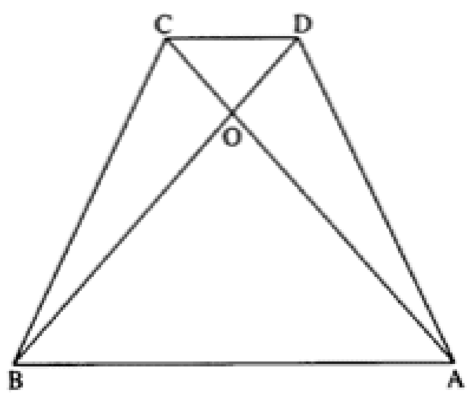
∴ $\frac{AR}{AP} = \frac{SR}{QP}$ ___(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात)

∴ $\frac{5}{1} = \frac{SR}{QP}$ __(1 वरुन)

∴ 5QP = SR

∴ SR = 5 PQ

6. समलंब चौकोन ABCD मध्ये, बाजू AB || बाजू DC. कर्ण AC व कर्ण BD हे परस्परांना O बिंदूत छेदतात. AB = 20, DC = 6, OB = 15, तर OD काढा.



रीत : समलंब चौकोन ABCD मध्ये, बाजू AB || बाजू DC.

कर्ण AC व कर्ण BD या छेदिका.

< BDC ~ < DBA

व < ACD ~ < CAB ____(व्युत्क्रम कोन)

म्हणजेच, < ODC ~ < OBA

व < OCD ~ < OAB ___(तेच कोन परंतु नावे भिन्न)_____(1)

Δ ODC व Δ OBA मध्ये,

< ODC ≅ < OBA

< OCD ≅ < OAB ___ (1) वरून

∴ Δ ODC ~ Δ OBA ____(समरूपतेची कोको कसोटी)

$\therefore \frac{DC}{BA} = \frac{OD}{OB}$ ___(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाज

प्रमाणात असतात.)

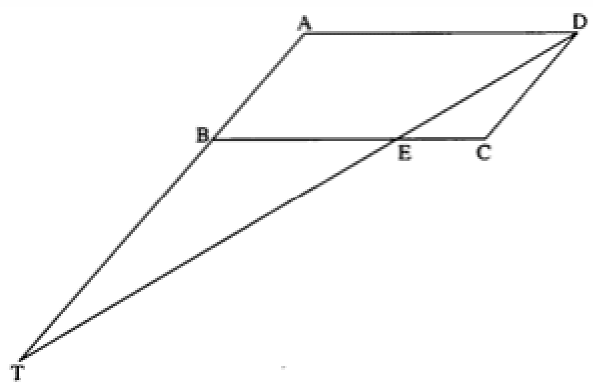
$\therefore \frac{6}{20} = \frac{OD}{15}$ ___(दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore OD = \frac{6 \times 15}{20} = \frac{90}{20}$

$\therefore OD = \frac{9}{2} = 4.5$

उत्तर : OD = 4.5 आहे.

7. ■ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. बाजू BC वर E हा एक बिंदू आहे. रेषा DE ही किरण AB ला T बिंदूत छेदते, तर DE × BE = CE × TE दाखवा.




सिद्धता : ■ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

< A ≅ < C (म्हणजेच < DCE ) ____(संमुख कोन)_____ (1)

तसेच, < A ≅ < TBE ____ (संगत कोन)____(2)

∴ < DCE ≅ < TBE ___ [(1) व (2) वरून ] ____(3)

Δ DEC व Δ TEB मध्ये,

< DCE ≅ < TBE ____ [(3) वरून]

< DEC ≅ < TEB ____(विरुद्ध कोन)

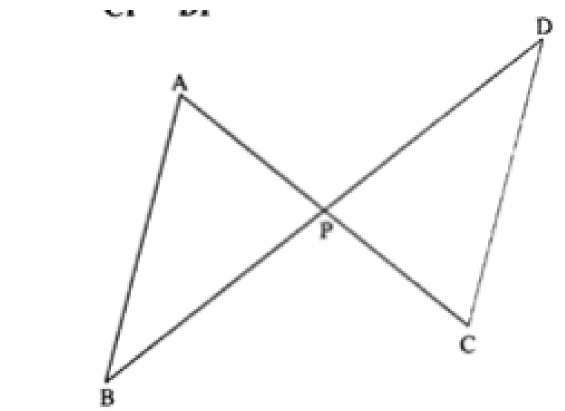
$\therefore$ $\Delta$ DEC ~ $\Delta$ TEB ___(समरूपतेची कोको कसोटी)

$\therefore$ $\frac{DE}{TE} = \frac{CE}{BE}$ __(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात)

DE × BE = CE × TE

8. आकृतीत, रेख AC व रेख BD परस्परांना P बिंदूत छेदतात आणि $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$

तर सिदध करा, $\Delta$ ABP ~ $\Delta$ CDP.




सिद्धता : $\Delta$ ABP व $\Delta$ CDP मध्ये,

$\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ ___(दिले आहे)

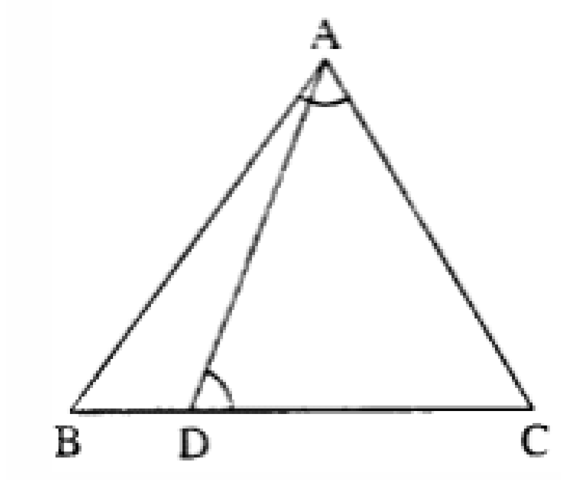
< APB ≅ < CPD ___(विरुद्ध कोन)

$\therefore$ < ABP ~ < CDP ___(समरूपतेची बाकोबा कसोटी)

9. आकृतीत Δ ABC मध्ये,

बाजू BC वर D हा बिंदू असा आहे की,

< BAC = < ADC , तर सिद्ध करा, $CA^2$ = CB× CD.




सिद्धता : Δ CDA व Δ CAB

< ADC ≅ < BAC ____(दिले आहे)

< C ≅ < C ___(सामाईक कोन)

∴ Δ CDA ~ Δ CAB ___(समरूपतची कोको कसोटी)

∴ $\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA}$ __(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात.)

∴ $CA \times CA = CD \times CB$

$CA^2$ = CB× CD

# सरावसंच 1.4

1. दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजूंचे गुणोत्तर 3 : 5 आहे, तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

समजा, $\Delta$ ABC ~ $\Delta$ PQR .

$\Delta$ ABC हा लहान त्रिकोण व $\Delta$ PQR हा मोठा त्रिकोण आहे.

$\frac{AB}{PQ} = \frac{3}{5}$ ____(पक्षावरून)_____ (1)

AB व PQ यांच्या गुणोत्तरांची समानपट x मानू.

$\therefore AB = 3x$ व $PQ = 5x$

$\therefore \frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ __(समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय)

$= \frac{(3x)^2}{(5x)^2} = \frac{9x^2}{25x^2} = \frac{9}{25}$

दिलेल्या त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर = 9 : 25 आहे.

2. Δ ABC ~ Δ PQR आणि AB : PQ = 2 : 3; तर पुढील चौकटी पूर्ण करा :

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\square} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\square}{\square}$$

उत्तर :

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\boxed{PQ^2}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$$

3. Δ ABC ~ Δ PQR $A(\Delta ABC) = 80$, $A(\Delta PQR) = 125$ तर पुढील चौकटी पूर्ण करा :

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \square)} = \frac{80}{125} \qquad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\square}{\square}$$

उत्तर : $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \boxed{PQR})} = \frac{80}{125} \qquad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}$

4. Δ LMN ~ Δ PQR , 9 × A(Δ $PQR$) = 16 × A(Δ $LMN$) जर QR = 20, तर MN काढा.

रीत : Δ LMN ~ Δ PQR ____ (दिले आहे)

$\therefore \frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta PQR)} = \frac{MN^2}{QR^2}$ ____ (समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय)____ (1)

$9 \times A(\Delta PQR) = 16 \times A(\Delta LMN)$ ___(दिले आहे)

$\therefore \frac{9}{16} = \frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta PQR)}$ ___ (1)

$\therefore \frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta PQR)} = \frac{9}{16}$

$\therefore \frac{MN^2}{QR^2} = \frac{9}{16}$ ___(1) व (2) वरून

$\therefore \frac{MN}{QR} = \frac{3}{4}$ ___(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\therefore \frac{MN}{20} = \frac{3}{4}$ ____(QR=20, दिले आहे)

$\therefore MN = \frac{20 \times 3}{4} = 15$

उत्तर : MN = 15 आहे.

5. दोन समरूप त्रिकोणांची क्षेत्रफळे 225 चौसेमी व 81 चौसेमी आहेत. जर लहान त्रिकोणाची एक बाजू 12 सेमी असेल, तर मोठ्या त्रिकोणाची संगत बाजू काढा.

रीत : समजा, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\Delta$ ABC हा मोठा त्रिकोण व $\Delta$ PQR हा लहान त्रिकोण आहे.

$A(\Delta ABC) = 225$ चौसेमी व $A(\Delta PQR) = 81$ चौसेमी

PQ = 12 सेमी.

$\frac{A(\Delta\ ABC)}{A(\Delta\ PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ ___(समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय)

$\therefore\ \frac{225}{81} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ _____ (दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore\ \frac{15}{9} = \frac{AB}{12}$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\therefore\ AB = \frac{15\times 12}{9}$ = 20 सेमी

उत्तर : मोठ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजूची लांबी 20 सेमी आहे.

6. Δ ABC व Δ DEF हे दोन्ही समभुज त्रिकोण आहेत. *A*(Δ ABC) : A(Δ DEF ) = 1: 2 असून AB = 4, तर DE ची लांबी काढा.

रीत : Δ ABC ~ Δ DEF _____ (दिले आहे)

$\frac{A(\Delta\ ABC)}{A(\Delta\ DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2}$ ___(समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय)

$\therefore\ \frac{1}{2} = \frac{(4)^2}{DE^2}$ ____(दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore\ \frac{1}{2} = \frac{16^2}{DE^2}$

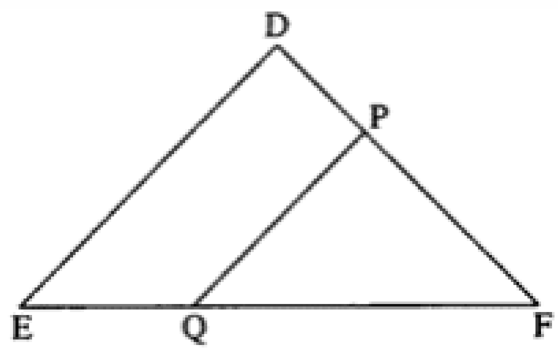
$\therefore\ DE^2 = 16\ \times 2$

$\therefore DE = \sqrt{16} \times \sqrt{2}$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\therefore DE = 4\sqrt{2}$

उत्तर : DE =$4\sqrt{2}$ आहे.

7. आकृतीमध्ये, रेख PQ || रेख DE, A( ΔPQF) = 20 चौएकक, जर PF = 2DP आहे, तर A(■ $DPQE$) काढण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा :




A( Δ PQF) = 20 चौएकक, PF = 2DP, DP = x मानू.

∴ PF = 2x.

DF = DP + ☐

= ☐ + ☐

= 3x

Δ FDE व Δ FPQ मध्ये,

$< FDE \cong < \square$ ___(संगत कोन)

$\therefore \Delta FED \cong < \square$ ___(संगत कोन)

$\therefore \Delta FDE \sim < FPQ$ ____(समरूपतेची कोको कसोटी)

$\frac{A(\Delta FED)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\square}{\square} = \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{9}{4}$

$A(\Delta FED) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \square = \square$

$A(\blacksquare DPQE) = A(\Delta FDE) - A(\Delta FPQ)$

$= \square - \square$

$= \square$

उत्तर :

A( Δ PQF) = 20 चौएकक, PF = 2DP, DP = x मानू.

$\therefore PF = 2x.$

$DF = DP + \boxed{PF}$

$= \boxed{x} + \boxed{2x}$

$= 3x$

Δ FDE व Δ FPQ मध्ये,

< FDE ≅ < $\boxed{FPQ}$ ___(संगत कोन)

∴ ΔFED≅ < $\boxed{FQP}$ ___(संगत कोन)

∴ Δ FDE ~ < FPQ ____(समरूपतेची कोको कसोटी)

$$\frac{A(\Delta FED)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\boxed{DF^2}}{\boxed{PF^2}} = \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\Delta FED) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \boxed{20} = \boxed{45}$$

A(■ $DPQE$) = A( Δ FDE) - $A(\Delta FPQ)$

$$= \boxed{45} - \boxed{20}$$

$$= \boxed{25 \text{ चौएकक}}$$

# संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

प्र. १ खालील उपप्रश्नांची पर्यायी उत्तरे दिली आहेत त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

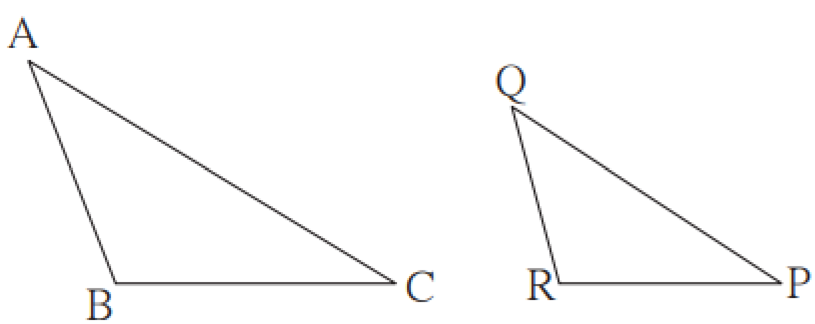
(i) जर Δ ABC व ΔPQR मध्ये एका एकास एक संगतीत $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ तर खालीलपैकी सत्य विधान कोणते?

(A) Δ PQR ~ Δ ABC

(B) Δ PQR ~ Δ CAB

(C) Δ CBA ~ Δ PQR

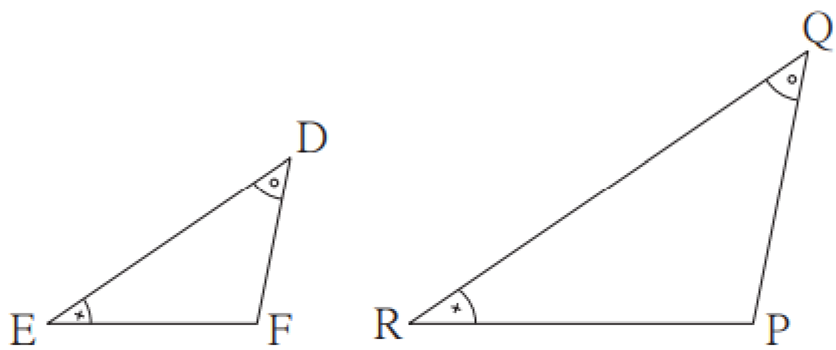
(D) Δ BCA ~ Δ PQR




उत्तर :- (B) Δ PQR ~ Δ CAB

(ii) जर Δ DEF व Δ PQR मध्ये, < D ≅ < Q, <R ≅ <E, तर खालीलपैकी

असत्य विधान कोणते ?




(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$

(B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

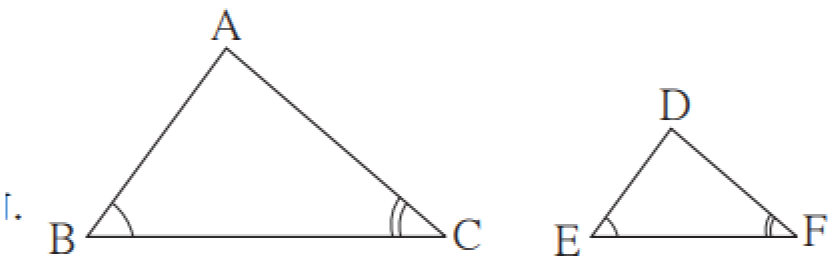
(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$

(D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$

उत्तर :- (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

(iii) Δ ABC व Δ DEF मध्ये < B = < E, < F = < C आणि AB = 3 DE, तर त्या

दोन त्रिकोणांबाबत सत्य विधान कोणते?




(A) ते एकरूप नाहीत आणि समरूपही नाहीत.

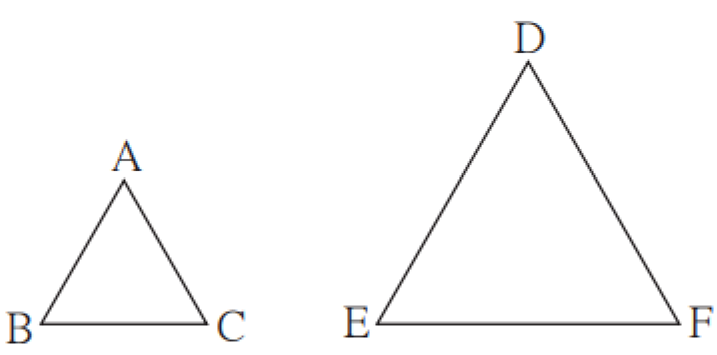
(B) ते समरूप आहेत पण एकरूप नाहीत.

(C) ते एकरूप आहेत आणि समरूपही आहेत.

(D) वरीलपैकी एकही विधान सत्य नाही.

उत्तर :- (B) ते समरूप आहेत पण एकरूप नाहीत.

(iv) Δ ABC व Δ DEF हे दोन्ही समभुज त्रिकोण आहेत, A (Δ ABC) : A (Δ DEF) = 1 : 2 असून AB = 4 आहे तर DE ची लांबी किती ?



(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$

उत्तर :- (D) $4\sqrt{2}$

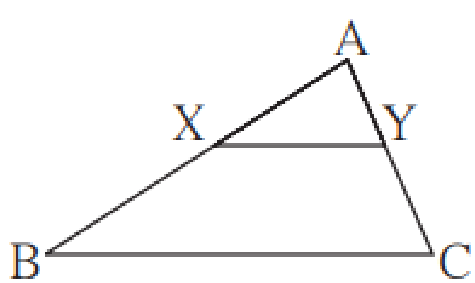
(v) आकृतीमध्ये रेख XY || रेख BC तर खालील पैकी कोणतेविधान सत्य आहे?

(A) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$

(B) $\frac{AX}{XB} = \frac{AX}{AC}$

(C) $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$

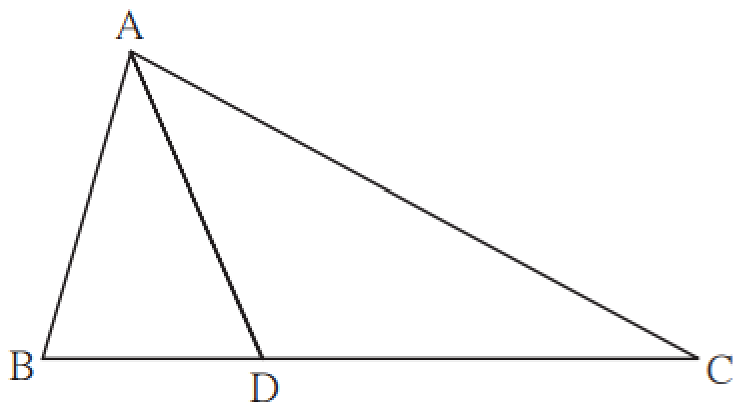
(D) $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$




उत्तर :- (A) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$

प्र. 2 Δ ABC मध्ये B - D – C आणि BD = 7, BC = 20 तर खालील गुणोत्तरे काढा.

(i) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$ (ii) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$ (iii) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$




रीत :- येथे, BD=7 व BC=20.

BC = BD + DC ...(B-D-C)

$\therefore 20 = 7 + DC$

$\therefore DC = 20 - 7 = 13$

1) Δ ABD व Δ ADC यांचे पाया रेख BD व रेख DC हे एकरेषीय (B-D-C) असून, A हा त्या दोन त्रिकोणांचा सामाईक शिरोबिंदू आहे.

∴ हे समान उंचीचे त्रिकोण आहेत.

∴ Δ ABD व Δ ADC यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात आहे.

$$\therefore \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BD}{DC} = \frac{7}{13}$$

2) $\Delta$ ABD व $\Delta$ ABC यांचे पाया रेख BD व रेख BC हे एकरेषीय (B-D-C) असून, A हा त्या दोन त्रिकोणांचा सामाईक शिरोबिंदू आहे.

∴ हे समान उंचीचे त्रिकोण आहेत.

∴ $\Delta$ ABD व $\Delta$ ABC यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात आहे.

$$\therefore \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC} = \frac{7}{20}$$

3) $\Delta$ ADC व $\Delta$ ABC यांचे पाया रेख DC व रेख BC हे एकरेषीय (B-D-C) असून, A हा त्या दोन त्रिकोणांचा सामाईक शिरोबिंदू आहे.

∴ हे समान उंचीचे त्रिकोण आहेत.

∴ $\Delta$ ADC व $\Delta$ ABC यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात आहे.

$$\therefore \frac{A(\Delta\, ADC)}{A(\Delta ABC)} = \frac{DC}{BC} = \frac{13}{20}$$

प्र.3 समान उंचीच्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर 2 ः 3 आहे, लहान त्रिकोणाचा पाया 6 सेमी असेल तर मोठ्या त्रिकोणाचा संगत पाया किती असेल?

उत्तर :- समजा, Δ1 हा लहान त्रिकोण असून, Δ2 हा मोठा त्रिकोण आहे. लहान त्रिकोणाचा पाया b1 व मोठ्या त्रिकोणाचा पाया b2 आहे. समान उंचीच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात.

$$\therefore \frac{A(\Delta 1)}{A(\Delta 2)} = \frac{b1}{b2}$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{6}{b2}$$ *( दिलेल्या किमती भरून)*

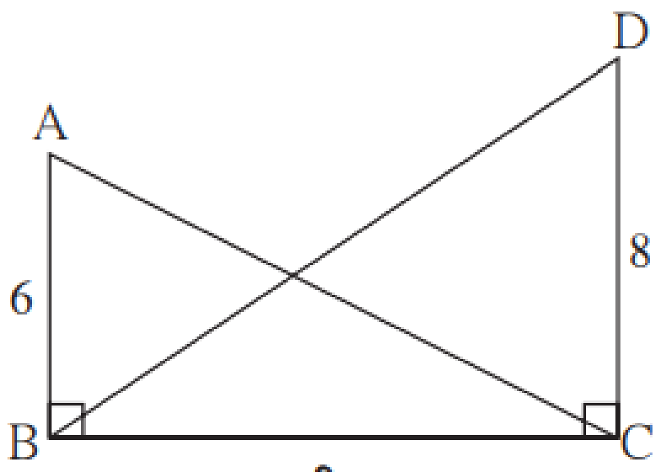
$$\therefore b2 = \frac{3 \times 6}{2}$$

$\therefore b2 = 9$ सेमी

प्र. 4 आकृतीत $< ABC = < DCB = 90°,\ AB = 6, DC = 8,$ तर $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)} =$ किती ?

उत्तर :- $\Delta ABC$ व $\Delta DCB$ चा पाया रेख BC समान आहे.

∴ ΔABC व ΔDCB ची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत उंचींच्या प्रमाणात असतील.

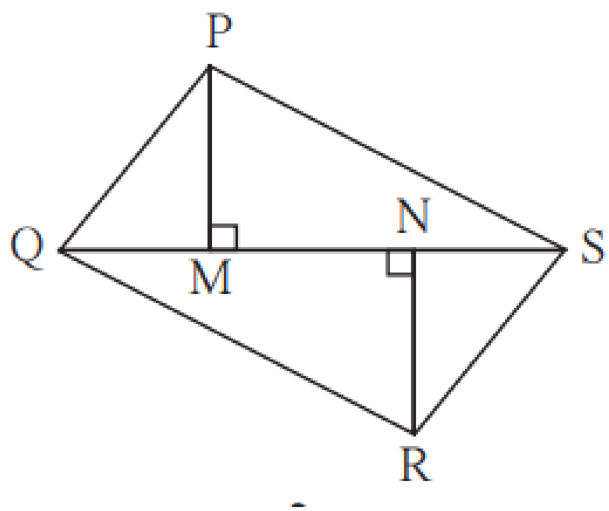



$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)} = \frac{AB}{DC}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)} = \frac{3}{4}$$

प्र 5. आकृतीमध्ये PM = 10 सेमी A(D PQS) = 100 चौसेमी A(DQRS) = 110 चौसेमी तर NR काढा.




उत्तर :- $\Delta PQS$ व $\Delta\ QRS$ यांचा पाया रेख QS हा सामाईक आहे.

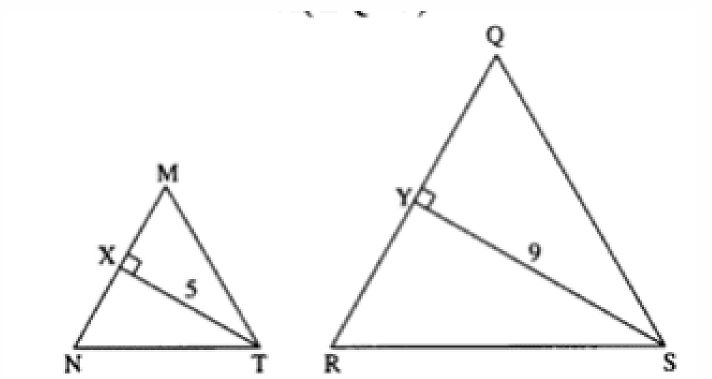
$$\therefore\ \frac{A(\Delta PQS)}{A(\Delta QRS)} = \frac{PM}{RN}$$

$$\therefore\ \frac{100}{110} = \frac{10}{RN}$$

$$\therefore NR = \frac{110 \times 10}{100} = 11 \text{ सेमी}$$

| NR 11 सेमी आहे. |
|---|

प्र. 6 $\Delta$ MNT ~ $\Delta$ QRS बिंदू T पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 5 असून बिंदू S पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 9 आहे, तर $\frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ हे गुणोत्तर काढा.




उत्तर :- $\Delta$ MNT मध्ये, रेख TX $\perp$ बाजू MN

व $\Delta QRS$ मध्ये, रेख SY $\perp$ बाजू QR

$\Delta$ MNT ~ $\Delta$ QRS ......(पक्ष)

$\therefore \frac{MN}{QR} = \frac{NT}{RS} = \frac{MT}{QS}$ ...(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात).(1)

$< TMN \cong < SQR$ ___(समरूप त्रिकोणांचे संगत कोन)

म्हणजेच, $< TMX \cong < SQY$ ___(तेच कोन परंतू नावे भिन्न) ..(2)

आता, $\Delta TMX$ व $\Delta SQY$ मध्ये,

$< TMX \cong < SQY$ ___(2 वरुन)

$< MXT \cong < QYS$ ___(प्रत्येकी 90°)

$\therefore \Delta MXT \sim \Delta QYS$ ____(समरुपतेची कोको कसोटी)

$\therefore \frac{MX}{QY} = \frac{XT}{YS} = \frac{MT}{QS}$ ...(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात)(3)

(1)व (3) वरुन

$\therefore \frac{XT}{YS} = \frac{MT}{QS}$ ____(4)

$\therefore \frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)} = \frac{MT^2}{QS^2}$ ....(समरुप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय)

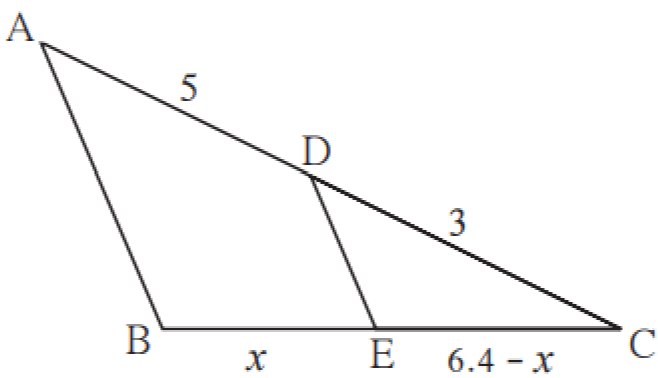
$= \frac{XT^2}{YS^2}$

$= \frac{5^2}{9^2}$

$= \frac{25}{81}$

$$\therefore \frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)} = \frac{25}{81}$$

प्र. 7 आकृती मध्ये A – D – C व B – E – C . रेख DE || बाजू AB. जर AD = 5, DC = 3, BC = 6.4 तर BE काढा.




उत्तर :- $\Delta CAB$ मध्ये,

रेख DE || बाजू AB

$\therefore \frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$ ___(प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार)

म्हणजेच, $\frac{DC}{AD} = \frac{EC}{BE}$

$\therefore \frac{3}{5} = \frac{6.4-X}{X}$ ___(दिलेल्या किमती भरुन)

$\therefore 3 \times X = (6.4 - X) \times 5$

$\therefore 3X = 32 - 5X$

$\therefore 3X + 5X = 32$

$\therefore 8X = 32$

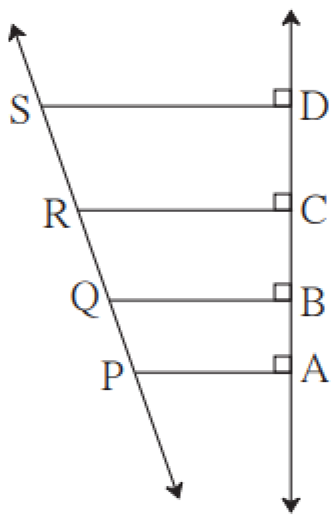
$\therefore X = \frac{32}{8}$

$\therefore X = 4$

$\therefore BE = 4$

| |
|---|
| $BE = 4$ आहे |

प्र. 8 आकृतीमध्ये, रेख PA, रेख QB, रेख RC व रेख SD हे रेषा AD ला लंब आहेत. AB = 60, BC = 70, CD = 80, PS = 280, तर PQ, QR, RS काढा.



उत्तर :- आकृतीत, रेख PA, रेख QB, रेख RC व रेख SD हे रेषा AD ला लंब आहेत.

∴ रेख PA || रेख QB || रेख RC || रेख SD

रेख PS व रेख AD या छेदिका.

∴ तीन समांतर रेषा व त्यांच्या छेदिका यांच्या गुणधर्मानुसार,

$\frac{PQ}{QS} = \frac{AB}{BD}$ _____ (1)

AB = 60, BC = 70, CD = 80, A-B-C-D ____ (आकृतीवरून)

∴ BD = BC + CD = 70 + 80 = 150 _____ (2)

आता, PQ = x मानू.

मग PQ + QS = PS ____(P-Q-R-S)

$\therefore X + QS = 280$

$\therefore QS = 280 - X$ ____[दिलेल्या किमती भरून तसेच (1) व (2) वरून ]

$\therefore \frac{X}{280-X} = \frac{2}{5}$

$X \times 5 = 2 \times (280 - X)$

$\therefore 5X = 560 - 2X$

$\therefore 5X + 2X = 560$

$\therefore 7X = 560$

$\therefore X = \frac{560}{7}$

$\therefore X = 80$

$\therefore PQ = 80$

$\therefore QS = 280 - X = 280 - 80$

$\therefore QS = 200$

आता, QR =y मानू.

मग, QR + RS = Qs_____(Q-R-S)

∴ y + RS = 200

∴ RS = 200 - y

तीन समांतर रेषा व त्यांच्या छेदिका यांच्या गुणधर्मानुसार,

$\frac{QR}{RS} = \frac{BC}{CD}$

$\frac{Y}{200-Y} = \frac{70}{80}$ ________(दिलेल्या किमती भरुन)

$\therefore \frac{Y}{200-Y} = \frac{7}{8}$

$\therefore Y \times 8 = 7 \times (200 - Y)$

$\therefore 8Y = 1400 - 7Y$

$\therefore 8Y + 7Y = 1400$

$\therefore 15Y = 1400$

$\therefore Y = \frac{1400}{5}$

$\therefore Y = \frac{280}{3}$

$\therefore QR = \frac{280}{3}$

$\therefore RS = 200 - \frac{280}{3}$

$\therefore RS = \frac{600-280}{3}$

$\therefore = \frac{320}{3}$

PQ= 80

QR= $\frac{280}{3}$

RS = $\frac{320}{3}$ आहेत.

प्र. 9 Δ PQR मध्ये रेख PM ही मध्यगा आहे. <PMQ व <PMR चे दुभाजक बाजू PQ व बाजू PR ला अनुक्रमे X आणि Y बिंदूत छेदतात, तर सिद्ध करा XY || QR.

सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

Δ PMQ मध्ये किरण MX हा < PMQ चा दुभाजक आहे.

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ .... (कोनदुभाजकाचे प्रमेय)....(1)

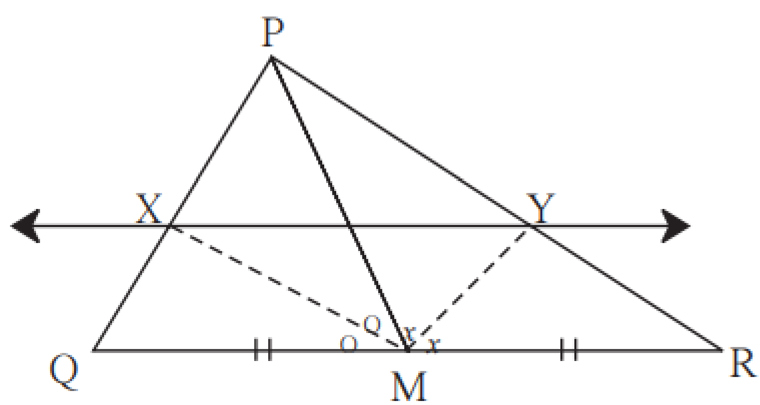
Δ PMR मध्येकिरण MY हा < PMR चा दुभाजक आहे.

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ ......(II) (कोनदुभाजकाचे प्रमेय)

परंतु $\frac{MP}{MQ} = \frac{MP}{MR}$ .......... (M हा QR चा मध्य म्हणजेच MQ = MR)

$\therefore \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$

$\therefore XY \parallel QR$ ......... (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)




उत्तर :- Δ PMQ मध्ये किरण MX हा ∠ PMQ चा दुभाजक आहे.

$\therefore \frac{\boxed{PM}}{\boxed{MQ}} = \frac{\boxed{PX}}{\boxed{XQ}}$ .... (कोनदुभाजकाचे प्रमेय)....(1)

Δ PMR मध्येकिरण MY हा ∠ PMR चा दुभाजक आहे.

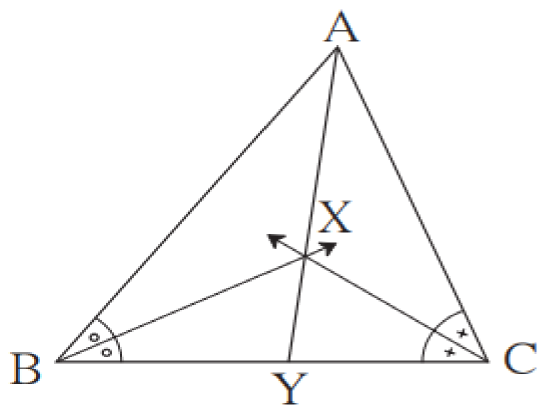
$\therefore \frac{\boxed{PM}}{\boxed{MQ}} = \frac{\boxed{PY}}{\boxed{YR}}$ ......(II) (कोनदुभाजकाचे प्रमेय)

परंतु $\frac{MP}{MQ} = \frac{MP}{MR}$ .......... (M हा QR चा मध्य म्हणजेच MQ = MR)

$\therefore \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$

$\therefore XY \parallel QR$ ......... (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

प्र. 10 आकृतीमध्ये Δ ABC च्या < B व < C चे दुभाजक एकमेकांना X मध्ये छेदतात, रेषा AX ही बाजू BC ला Y मध्ये छेदते जर AB = 5, AC = 4, BC = 6 तर $\frac{AX}{XY}$ ची किंमत काढा.




उत्तर :- त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या प्रमेयानुसार,

$\frac{AB}{BY} = \frac{AX}{XY}$ ......(1)

व Δ ACY मध्ये, $\frac{AC}{CY} = \frac{AX}{XY}$ ..... (2)

$\therefore \frac{AB}{BY} = \frac{AC}{CY} = \frac{AX}{XY}$ ....(1) व (2) वरुन

समान गुणोत्तराच्या सिद्धांतानुसार,

$\therefore \frac{AB+AC}{BY+CY} = \frac{AX}{XY}$ $\therefore \frac{AB+AC}{BC} = \frac{AX}{XY}$ ......(B-Y-C)

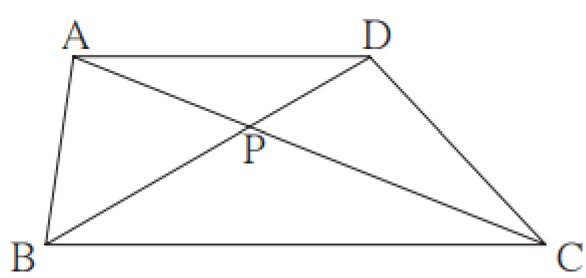
$\therefore \frac{5+4}{6} = \frac{AX}{XY}$ ....(दिलेल्या किमती भरुन)

$\therefore \frac{AX}{XY} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\frac{AX}{XY} = \frac{3}{2}$

प्र. 11 ■ABCD मध्ये रेख AD || रेख BC. कर्ण AC आणि कर्ण BD परस्परांना बिंदू P मध्ये छेदतात. तर दाखवा की

$\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$




उत्तर :- ■ABCD मध्ये,

रेख AD || रेख BC आणि कर्ण AC व कर्ण BD या छेदिका.

$\therefore < CAD \cong < ACB$ ___(व्युत्क्रम कोन)

व $< ADB \cong < DBC$

म्हणजेच,

$\therefore < PAD \cong < PCB$

व $< ADP \cong < PBC$ _____(तेच कोन परंतु नावे भिन्न)

आता, Δ PAD व Δ PCE मध्ये,

$\therefore < PAD \cong < PCB$

व $< PDA \cong < PBC$ ____(वर सिद्ध केले)

$\therefore \Delta PAD \sim \Delta PCB$ ____(समरूपतेची कोको कसोटी)

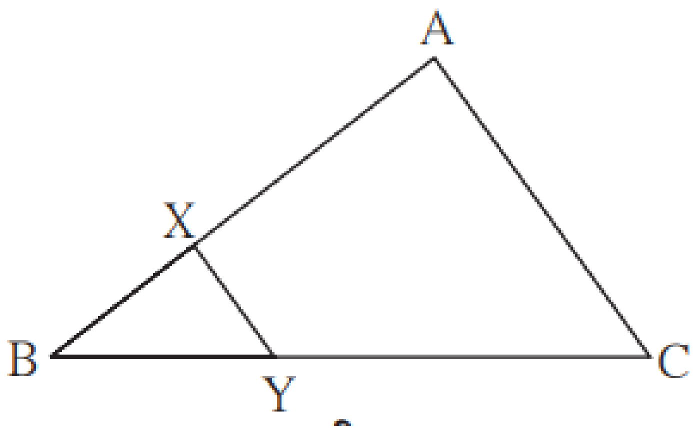
$\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ _____(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात.)

$\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{PD}{BP}$

$\therefore \frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$ ____(एकांतर क्रियेने)

12 आकृतीमध्ये XY || बाजू AC. जर 2AX = 3BX आणि XY = 9 तर AC ची

किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.




कृती :- 2AX = 3BX

$\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{AX+BX}{BX} = \frac{\square+\square}{\square}$ ....... (योग क्रिया करून)

$\frac{AB}{BX} = \frac{\square}{\square}$ ......(1)

$\therefore BCA \sim \Delta\, BYX$ ......... (समरूपतेची $\square$ कसोटी)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ ....... (समरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू)

$\frac{\square}{\square} = \frac{AC}{9}$

$\therefore AC = \square$ .........(I) वरून

उत्तर :- 2AX = 3BX

$\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$

$\frac{AX+BX}{BX} = \frac{\boxed{3}+\boxed{2}}{\boxed{2}}$ ....... (योग क्रिया करून)

$\frac{AB}{BX} = \frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$ ......(1)

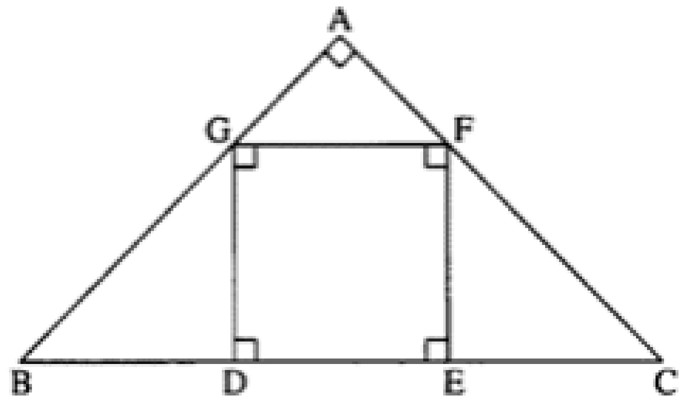
$\therefore BCA \sim \Delta BYX$ ......... (समरूपतेची $\boxed{\text{कोको}}$ कसोटी)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ ....... (समरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू)

$\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}} = \frac{AC}{9}$

$\therefore AC = \boxed{22.5}$ .........(I) वरून

13. Δ ABC मध्ये < A = 90°. ■ DEFG या चौरसाचे D व E हे शिरोबिंदू बाजू BC वर आहेत. बिंदू F हा बाजू AC वर आणि बिंदू G हा बाजू AB वर आहे. तर सिद्ध करा. $DE^2$ = BD × EC (Δ GBD व Δ CFE हे समरूप दाखवा. GD = FE = DE याचा उपयोग करा.)




उत्तर :- ΔCBA व ΔGBD मध्ये,

$< CBA \cong < GBD$ ____(सामाईक कोन)

व $< CAB \cong < GDB$ _____(प्रत्येकी 90°)

$\therefore \Delta CBA \sim \Delta GBD$ ____(समरूपतेची कोको कसोटी)..(1)

ΔCBA व Δ CFE मध्ये,

$< CAB \cong < CEF$ _____(प्रत्येकी 90°)

$< ACB \cong < ECF$ ____(सामाईक कोन)

$\therefore \Delta CBA \sim \Delta ECF$ ____(समरूपतेची कोको कसोटी)..(2)

$\therefore \Delta GBD \sim \Delta CEF$ ____(1) व (2) वरुन

$\frac{BD}{FE} = \frac{DG}{EC}$ ____(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात)___(3)

$EF = DE$ आणि $DG = DE$ ___(चौरसाच्या भुजा )____ (4)

$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{DE}{EC}$ _____(3) व (4) वरुन

$\therefore BD \times EC = DE \times DE$

$DE^2 = BD \times EC$