पायथागोरसचे प्रमेय

प्र. 1. खालील त्रिकुटांपैकी पायथागोरसची त्रिकुटे कोणती आहेत हे सकारण लिहा.

(1) (3, 5, 4) (2) (4, 9, 12)

(3) (5, 12, 13) (4) (24, 70, 74)

(5) (10, 24, 27) (6) (11, 60, 61)

(1) (3, 5, 4) :- या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये, मोठी संख्या 5 आहे.

$5^2=25$ आणि $3^2+4^2 = 9 + 16 = 25$

$\therefore\ 5^2 = 3^2 + 4^2$

या ठिकाणी मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका आहे.

(3, 5, 4) हे पायथागोरसचे त्रिकूट आहे.

(2) (4, 9, 12) :- या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये, मोठी संख्या 12 आहे.

$12^2= 144$ आणि $4^2+9^2 = 81 + 16 = 97$

$\therefore\ 12^2 \neq 9^2 + 4^2$

$\therefore 144 \neq 97$

या ठिकाणी मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका नाही.

(4, 9, 12) हे पायथागोरसचे त्रिकूट नाही.

(3) (5, 12, 13) :- या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये, मोठी संख्या 13 आहे.

$13^2 = 169$ आणि $5^2 + 12^2 = 28 + 144 = 169$

$\therefore 13^2 = 5^2 + 12^2$

या ठिकाणी मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका आहे.

(5, 12,13) हे पायथागोरसचे त्रिकूट आहे.

(4) (24, 70, 74) :- या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये, मोठी संख्या 74 आहे.

$74^2 = 5476$ आणि $24^2 + 70^2 = 576 + 4900 = 5476$

$\therefore 74^2 = 24^2 + 70^2$

या ठिकाणी मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका आहे

(24, 70, 74) हे पायथागोरसचे त्रिकूट आहे.

(5) (10, 24, 27) :- या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये, मोठी संख्या 27 आहे.

$27^2 = 729$ आणि 10^2 +$249^2 = 100 + 576 = 676$

$\therefore 729 \neq 676$

$\therefore\ 27^2 \neq 10^2 + 24^2$

या ठिकाणी मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या

बेरजेइतका नाही.

(10, 24, 27) हे पायथागोरसचे त्रिकूट नाही.

(6) (11, 60, 61) :- या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये, मोठी संख्या 61 आहे.

$61^2 = 3721$ आणि $11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721$

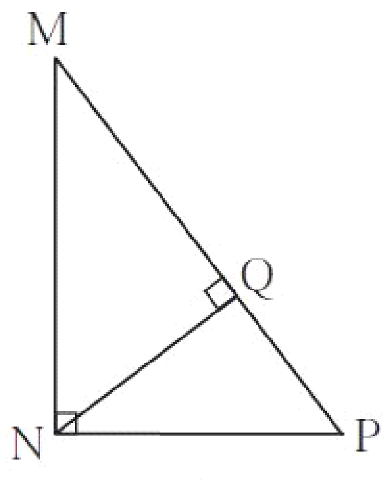
$\therefore\ 61^2 = 11^2 + 60^2$

या ठिकाणी मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या

बेरजेइतका आहे

(11, 60, 61) हे पायथागोरसचे त्रिकूट आहे.

प्र. 2 आकृतीमध्ये $\angle MNP = 90°$, रेख NQ $\perp$ रेख MP, MQ = 9, QP = 4 तर NQ काढा.



उत्तर : MNP मध्ये, रेख NQ $\perp$ रेख MP आणि M-Q-P.

शिरोलंब NQ हा कर्ण MP चे रेख MQ व रेख PQ असे दोन भाग करतो.

भूमितीमध्याच्या प्रमेयानुसार,

$NQ^2 = MQ \times QP$

$= 9 \times 4$ ....(दिलेल्या किमती भरून)

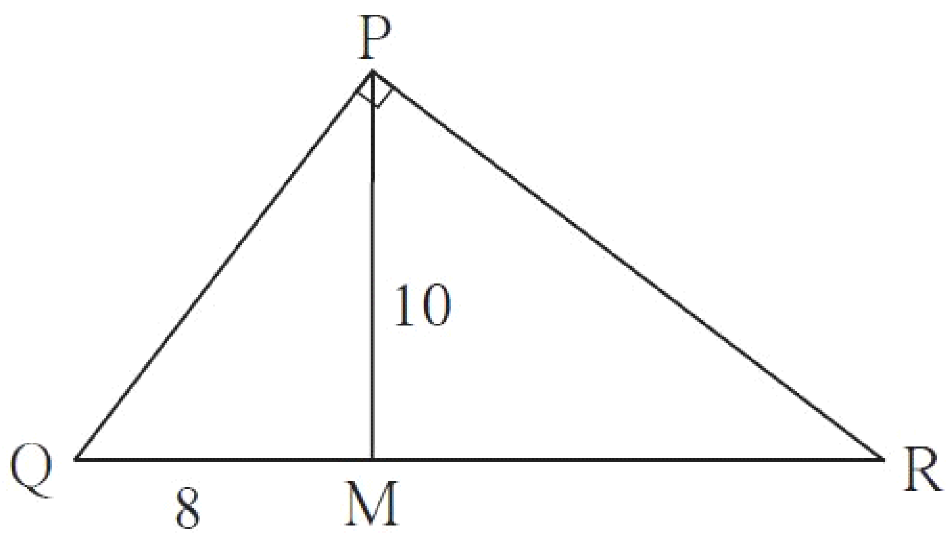
$= 36$

NQ = 6

तर NQ=6 आहे.

प्र. 3 आकृतीमध्ये < QPR = 90°, रेख PM रेख QR आणि Q-M-R,

PM = 10, QM = 8 यावरून QR काढा.



उत्तर : PQR मध्ये,

रेख PM ⊥ रेख QR आणि Q-M-R.

शिरोलंब PM हा कर्ण QR चे रेख QM व रेख MR असे दोन भाग करतो.

भूमितीमध्याच्या प्रमेयानुसार,

$$PM^2 = QM \times MR$$

$10^2 \quad = 8 \times MR$ ....(दिलेल्या किमती भरून)

$MR = \frac{100}{8}$

$= 12.5$

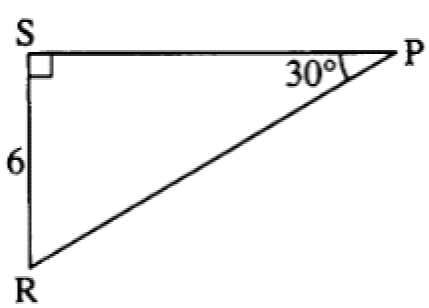
QR = QM + MR ....(Q-M-R)

$\therefore\ QR = 8 + 12.5$

$\therefore\ QR = 20.5$

$\therefore\ QR = 20.5$ आहे

प्र. 4 आकृतीमधील Δ PSR मध्ये दिलेल्या माहितीवरून RP आणि PS काढा.



उत्तर : Δ PSR मध्ये,

$\angle P = 30°$, ...(दिले आहे)

$< S = 90°$, ...(दिले आहे)

$\therefore < R = 60°$, ...(त्रिकोणाचा उरलेला कोन)

$\triangle$ PSR हा 30°,60°,90° मापाचा त्रिकोण आहे.

30°,60°,90° त्रिकोणाच्या प्रमेयावरून,

$SR = \frac{1}{2} PR$ ....(30° कोनासमोरील बाजू)

$\therefore 6 = \frac{1}{2} PR$

$\therefore PR = 6 \times 2 = 12$

तसेच, $PS = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12$ ....(PR ची किमंत भरून)

$= 6\sqrt{3}$

RP = 12, आणि PS = $6\sqrt{3}$ आहेत.

प्र. 5 आकृतीमध्ये दिलेल्या माहितीवरून AB आणि BC काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

AB = BC ....($\square$)

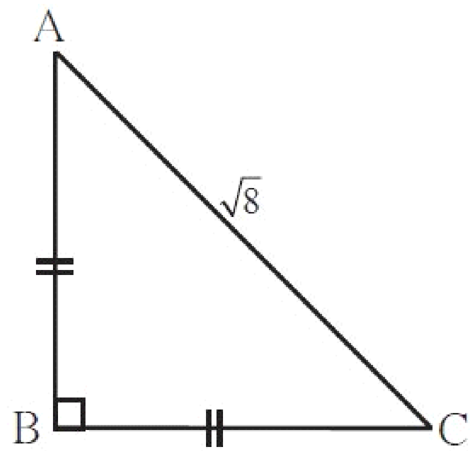
$\therefore <$ BAC = $\square$

AB = BC = $\square \times$ AC

= $\square \times \sqrt{8}$

$= \boxed{} \times 2\sqrt{2}$

$= \boxed{}$



उत्तर AB = BC ....(एकरुप कोनासमोरीन बाजू)

$\therefore \angle BAC = \boxed{45°}$

$AB = BC = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times AC$

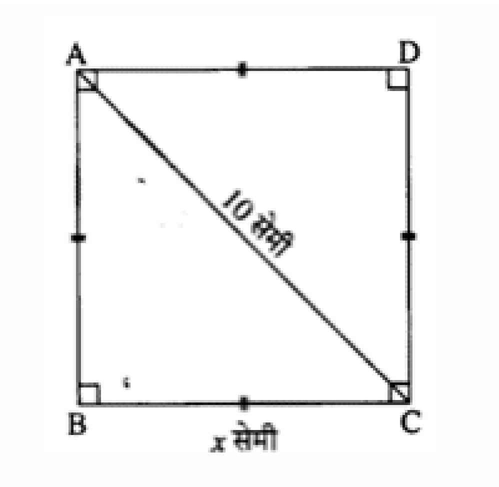
$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \sqrt{8}$

$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times 2\sqrt{2}$

$= \boxed{2}$

प्र. 6 एका चौरसाचा कर्ण 10 सेमी आहे तर त्याच्या बाजूची लांबी व परिमिती काढा.

उत्तर :



■ ABCD हा इष्ट चौरस मानू.

चौरसाचा प्रत्येक कोन काटकोन व सर्व भुजा एकरूप असतात.

समजा, चौरसाच्या बाजूची लांबी x सेमी आहे.

$\therefore \angle B = 90^\circ$

$\therefore$ Δ ABC या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore\ x^2 + x^2 = (10)^2$

$\therefore 2x^2 = 100$

$\therefore\ x^2 = 50$

$\therefore x = \sqrt{50}$

$\therefore x = \sqrt{25 \times 2}$

$\therefore x = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$

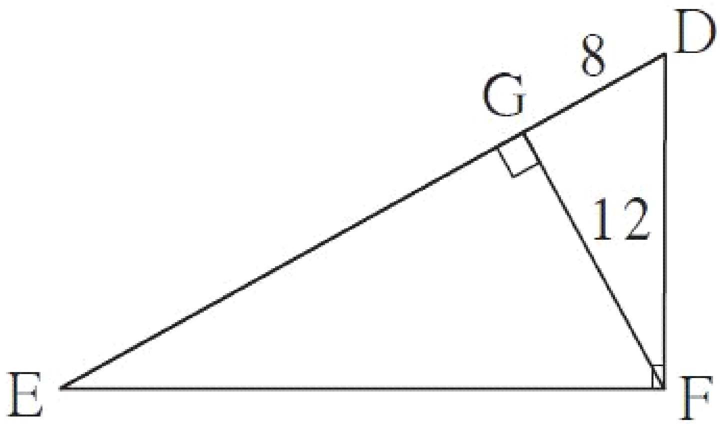
$\therefore x = 5\sqrt{2}$

चौरसाच्या बाजूची लांबी = $5\sqrt{2}$ सेमी

चौरसाची परिमिती = 4 × बाजू = 4 × $5\sqrt{2}$ = $20\sqrt{2}$ सेमी

प्र. 7 आकृतीमध्ये < DFE = 90°, रेख FG रेख ED. जर

GD = 8, FG = 12, तर (1) EG (2) FD आणि (3) EF काढा.



उत्तर : Δ DFE या काटकोन त्रिकोणात शिरोलंब FG हा कर्णाचे रेख DG व रेख GE असे दोन भाग करतो व D-G-E.

भूमितीमध्याच्या प्रमेयानुसार,

$FG^2 = DG \times GE$

$12^2 \quad = 8 \ \times GE$ ....(दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore GE = \frac{144}{8}$

$\therefore GE = 18$ ......(1)

आता, Δ FGE या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$EF^2 = FG^2 + GE^2$

$\therefore EF^2 = 12^2 + 18^2$ ....(दिलेल्या किमती भरून व (1) वरून)

$\therefore EF^2 = 144 + 324$

$= 468$

$\therefore EF = \sqrt{468}$

$= \sqrt{36 \times 13}$

$= 6\sqrt{13}$ ....(दोन्ही बाजूंची वर्गमूळे घेऊन).....(2)

तसेच, Δ FGD या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$FD^2 = FG^2 + GD^2$

$\therefore FD^2 = 12^2 + 8^2$ ....(दिलेल्या किमती भरून)

$= 144 + 64$

$= 208$

$FD = \sqrt{208}$

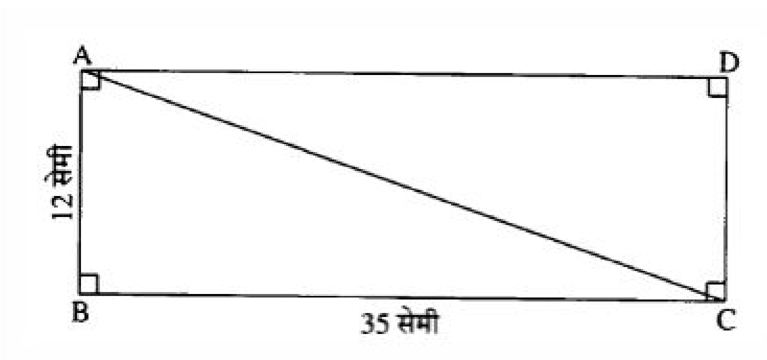
$= \sqrt{16 \times 13} = 4\sqrt{13}$ ....(दोन्ही बाजूंची वर्गमूळे घेऊन)

$i)\ EG = 18$

$ii)\ FD = 4\sqrt{13}$

$iii)\ EF = 6\sqrt{13}$

प्र. 8 एका आयताची लांबी 35 सेमी व रुंदी 12 सेमी आहे तर त्या आयताच्या कर्णाची लांबी काढा.



उत्तर : आयताचा प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

$\therefore \angle ABC = 90°$

Δ ABC या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore AC^2 = 12^2 + 35^2$ ....(दिलेल्या किमती भरून)

= 144 + 1225

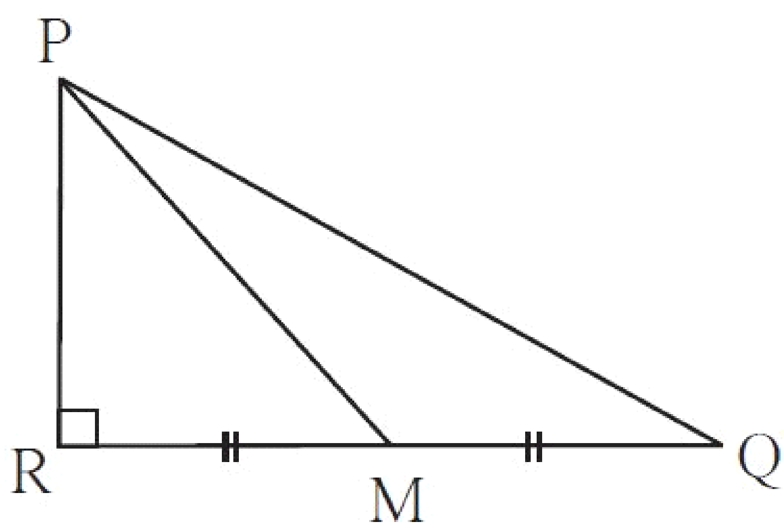
= 1369

$\therefore AC = \sqrt{1369}$ ....(दोन्ही बाजूंची वर्गमूळे घेऊन)

$\therefore AC = 37$ *सेमी*

आयताच्या कर्णाची लांबी 37 *सेमी*

प्र. 9 आकृतीमध्ये M हा बाजू QR चा मध्यबिंदू आहे. $\angle PRQ = 90°$ असेल तर सिद्ध करा, $PQ^2 = 4PM^2 + 3PR^2$



उत्तर :

Δ PRQ या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$ .....(1)

Δ PRM या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$PM^2 = PR^2 + RM^2$ ....(2)

परंतु, RQ = 2RM ....(M हा बाजू RQ मध्यबिंदु)

$\therefore RM = \frac{1}{2} RQ$ ....(3)

$\therefore PM^2 = PR^2 + (\frac{1}{2} RQ)^2$ .....((3) ची किमत (2) मध्ये भरून)

$\therefore PM^2 = PR^2 + \frac{1}{4} RQ^2$

$\therefore 4PM^2 = 4PR^2 + RQ^2$ .....(दोन्ही बाजूंना 4 ने गुणून).....(4)

समीकरण (4) मधून समीकरण (1) वजा करून,

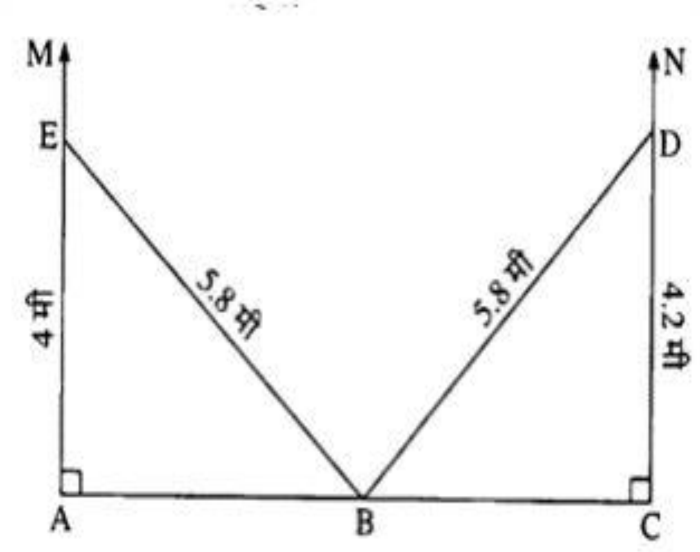
$4PM^2 - PQ^2 = 4PR^2 + RQ^2 - PR^2 - RQ^2$

$\therefore 4PM^2 - PQ^2 = 3PR^2$

$\therefore 4PM^2 - 3PR^2 = PQ^2$

$\therefore PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$

प्र. 10 रस्त्याच्या दुतर्फा असलेल्या इमारतीच्या भिंती एकमेकींना समांतर आहेत. 5.8 मी लांबीच्या शिडीचे एक टोक रस्त्यावर ठेवले असता तिचे वरचे टोक पहि ल्या इमारतीच्या 4 मीटर उंच असलेल्या खिडकीपर्यंत टेकते. त्याच ठि काणी शिडी ठेवून रस्त्याच्या दुसऱ्या बाजूस वळवि ल्यास तिचे वरचे टोक दुसऱ्या इमारतीच्या 4.2 मीटर उंच असलेल्या खिडकीपर्यंत येते , तर रस्त्याची रुंदी काढा.



उत्तर : आकृतीत, रेख AC हा रस्ता असून रेख AM व रेख CN या इमारतींच्या भिंती आहेत.

रस्त्यात B या ठिकाणी उभ्या केलेल्या शिडीचे वरचे टोक AM या भिंतीच्या E या ठिकाणी टेकते.

EA = 4 मी ____ (दिले आहे)

शिडी B त्याच ठिकाणी ठेवून दुसऱ्या इमारतीच्या भिंतीकडे वरचे टोक फिरवले असता ते D या ठिकाणी टेकते.

DC = 4.2 मी ____ (दिले आहे)

शिडीची लांबी 5.8 मी आहे.

आता Δ EAB मध्ये ,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$EB^2 = EA^2 + AB^2$

$\therefore\ 5.8^2 = 4^2 + AB^2$

$\therefore\ 5.8^2 - 4^2 = AB^2$

$\therefore\ AB^2 = (5.8 + 4)\ (5.8 - 4)$

$= (9.8)(1.8)$

= 17.64

$= (4.2)^2$

$\therefore AB = 4.2$ मी ....(दोन्ही बाजूंची वर्गमूळे घेऊन)..(1)

त्याचप्रमाणे Δ DCB मध्ये , $< C = 90°$

∴ Δ DCB मध्ये ,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$DB^2 = DC^2 + BC^2$

$\therefore 5.8 = 4.2^2 + BC^2$

$\therefore BC^2 = 5.8 - 4.2^2$

$= (5.8 + 4.2)(5.8 - 4.2)$

$= 16$

$\therefore BC = 4$ ....(दोन्ही बाजूंची वर्गमूळे घेऊन)

$\therefore AC = AB + BC$ ....(A-B-C)...(2)

= 4.2 + 4 ....(1 व 2 वरून)

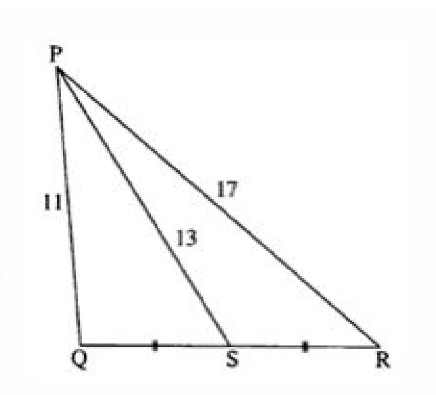
= 8.2 मी

रस्त्याची रुंदी 8.2 मी

सरावसंच 2.2

प्र. 1 ΔPQR मध्ये, बिंदू S हा बाजू QR चा मध्यबिंदू आहे,

जर PQ = 11, PR = 17, PS = 13 असेल तर QR ची लांबी काढा.



उत्तर : बाजू QR चा S हा मध्यबिंदू आहे. ___(दिले आहे)___ (1)

Δ PQR मध्ये, रेख PS ही मध्यगा आहे.

$PQ^2 + PR^2 = 2PS^2 + 2QS^2$ ...(अपोलोनिअसचे प्रमेय)

$\therefore\ 11^2 + 17^2 = 2 \times 13^2 + 2QS^2$ ....(दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore 121 + 289 = 2 \times 169 + 2QS^2$

$\therefore 410 = 338 + 2QS^2$

$\therefore 410 - 338 = 2QS^2$

$\therefore 2QS^2 = 72$

$\therefore QS^2 = \frac{72}{2}$

$\therefore QS^2 = 36$

$\therefore QS = 6$ ...(दोन्ही बाजूंची वर्गमूळे घेऊन)

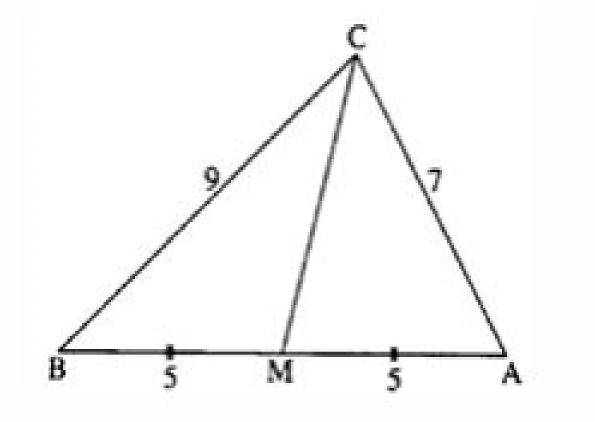
QR = 2 × QS ....(1 वरुन)

= 2 × 6

= 12

$\therefore QR = 12$

प्र. 2 Δ ABC मध्ये, AB = 10, AC = 7, BC = 9 तर बिंदू C मधून बाजू AB वर काढलेल्या मध्यगेची लांबी किती?



उत्तर : बिंदू C मधून काढलेली मध्यगा रेख CM ही बाजू AB ला M या बिंदूत छेदते B-M-A.

Δ CBA मध्ये,

रेख CM ही मध्यगा.

$\therefore BM = AM = 5$ ....(AB = 10, दिले आहे)

$CB^2 + CA^2 = 2CM^2 + 2BM^2$ .....(अपोलोनिअसचे प्रमेय)

$\therefore\ 9^2 + 7^2 = 2CM^2 + 2 \times 5^2$

$\therefore 81 + 49 = 2CM^2 + 2 \times 25$

$\therefore 130 = 2CM^2 + 50$

$\therefore 130 - 50 = 2CM^2$

$\therefore\ 2CM^2 = 80$

$\therefore\ CM^2 = 40$ ...(दोन्ही बाजूंची वर्गमूळे घेऊन)

$\therefore CM = \sqrt{40}$

$\therefore CM = \sqrt{4 \times 10}$

$= \sqrt{4} \times \sqrt{10}$

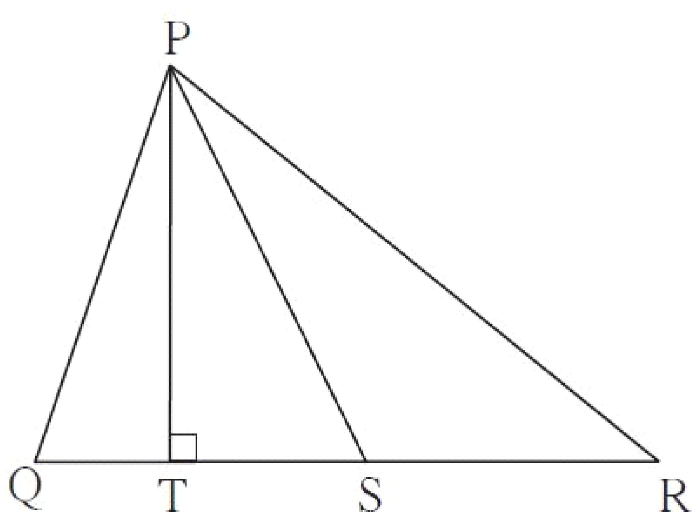
$\therefore CM = 2\sqrt{10}$

उत्तर : बिंदू C मधून बाजू AB वर काढलेल्या मध्यगेची लांबी $2\sqrt{10}$ आहे.

प्र. 3 आकृतीमध्ये रेख PS ही PQR ची मध्यगा आहे आणि PT QR तर सिद्ध करा,

1) $PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \frac{QR^2}{2}$

2) $PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \frac{QR^2}{2}$



उत्तर : 1) $< PSQ$ हा लघुकोन आहे. ______(आकृतीवरून)

$\therefore PSR$ हा विशालकोन आहे.

$\therefore PSR$ हा विशालकोन त्रिकोण आहे.

$\therefore T - S - R$

TR = TS + SR .....(1)

Δ PTR या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$PR^2 = PT^2 + TR^2$

$= PT^2 + (TS + SR)^2$ ...(1 वरुन)

$= PT^2 + TS^2 + SR^2 + 2TS.SR$ ....(2)

तसेच, Δ PTS या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$PT^2 + TS^2 = PS^2$ ....(3)

$\therefore PR^2 = PS^2 + SR^2 + 2.TS.SR$ ....(2 व 3 वरुन)

$= PS^2 + (\frac{1}{2}QR)^2 + 2TS(\frac{1}{2}QR)$

..(बाजू QR चा S मध्यबिंदू)

$= PS^2 + \frac{1}{4}QR)^2 + TS.QR$

$\therefore\ PR^2 = PS^2 + QR \times ST + (\frac{QR}{2})^2$

2) $< PSQ$ हा लघुकोन आहे. ______(आकृतीवरून)

$\therefore Q - T - S$

QS = QT + TS

$\therefore QT = QS - TS$ .....(4)

Δ PTR या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$PQ^2 = PT^2 + QT^2$

$= PT^2 + (QS + TS)^2$ .....(4 वरुन)

$= PT^2 + QS^2 + TS^2 - 2QS.TS$

$= PT^2 + TS^2 + QS^2 - 2QS.TS$ ....(5)

पुन्हा , Δ PTS या काटकोन त्रिकोणात

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$PT^2 + TS^2 = PS^2$ ....(6)

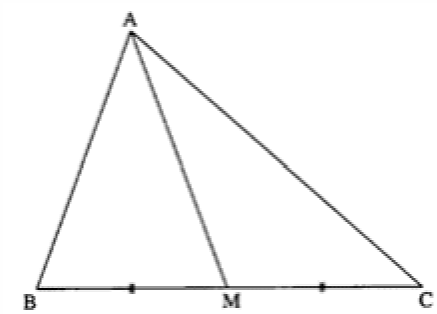
$\therefore\ PQ^2 = PS^2 + QS^2 - 2.QS.TS$ .....(5) व (6) वरुन

$= PS^2 + (\frac{1}{2}QR)^2 - 2.(\frac{1}{2}QR).TS$

$= PS^2 + \frac{1}{4}QR^2 - QR.TS$

$\therefore\ PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \frac{QR^2}{2}$

4. आकृतीमध्ये, Δ ABC च्या, बाजू BC चा बिंदू M हा मध्यबिंदू आहे. जर $AB^2 + AC^2$ = 290 सेमी ^{2} , AM = 8 सेमी, तर BC काढा.



रीत : Δ ABC च्या बाजू BC चा M हा मध्यबिंदू ___ (दिले आहे)

Δ ABC मध्ये, रेख AM ही मध्यगा आहे. ____(1)

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$ ___(अपोलोनियसचे प्रमेय)

$\therefore$ 290 = $2(8)^2$ + $2BM^2$ ____(दिलेल्या किमती भरून)

290 = 2 × 64 + $2BM^2$

$\therefore$ 290 = 128 + $2BM^2$

$\therefore$ 290 - 128 = $2BM^2$

$2BM^2 = 162$

$\therefore BM^2 = \frac{162}{2}$

$BM^2 = 81$

$\therefore$ BM = 9 ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

बाजू BC चा M हा मध्यबिंदू ____ [(1) वरून]

$\therefore$ BC = 2 BM

$\therefore$ BC = 2×9

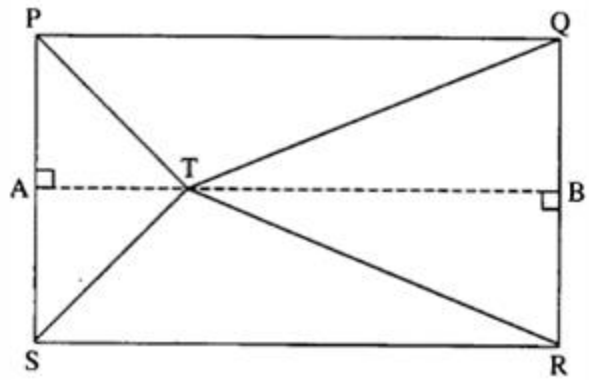
$\therefore$ BC = 18 सेमी.

उत्तर : BC = 18 सेमी आहे.

5. आकृतीमध्ये दाखवल्यानुसार T हा बिंदू आयत PQRS च्या अंतर्भागात आहे, तर सिद्ध करा :

$TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$

(आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे A-T-B असा रेख AB || बाजू SR काढा.)



रचना : बिंदू T मधून रेख AB अशी काढा की, रेख AB || बाजू SR.

A-T-B, P-A-S व Q-B-R.

सिद्धता : PQRS हा आयत आहे. ____ (दिले आहे)

बाजू PQ || बाजू SR ___ (आयताच्या संमुख बाजू)

व बाजू SR || रेख AB ____(रचना)

∴ ■ PABQ व ■ SABR हे सुद्धा आयत आहेत.

■ PABQ मध्ये,

PA = QB व PQ = AB ___ (आयताच्या संमुख बाजू)___ (1)

तसेच, ■ SABR मध्ये,

SA = RB व SR = AB ___ (आयताच्या संमुख बाजू)___ (2)

आता, Δ TAS मध्ये $< TAS = 90°$ ___(रचनेवरून)

Δ TAS मध्ये,

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$TS^2 = TA^2 + SA^2$ ____ (3)

तसेच, Δ TAP या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$TP^2 = TA^2 + PA^2$ ____(4)

आता, Δ TBR मध्ये , $< TBR = 90°$ ____(रचनेवरून)

Δ TBR मध्ये,

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$TR^2 = TB^2 + RB^2$ ___(5)

तसेच, Δ TBQ या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$TQ^2 = TB^2 + QB^2$ ____(6)

आता, समीकरण (3) व (6) ची बेरीज करून,

$TS^2 + TQ^2 = TA^2 + SA^2 + TB^2 + QB^2$

$TS^2 + TQ^2 = TA^2 + BR^2 + TB^2 + PA^2$ ____(1) व (2) वरून

$= TA^2 + PA^2 + BR^2 + TB^2$

$\therefore TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$ ____(4) व (5) वरून

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

प्र 1. पुढील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा :

(1) पुढीलपैकी कोणते पायथागोरसचे त्रिकूट आहे ?

(A) (1, 5, 10)

(B) (3, 4, 5)

(C) (2, 2, 2)

(D) (5, 5, 2)

उत्तर :- (B) (3, 4, 5)

(2) काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या बाजूच्या वर्गांची बेरीज 169 असेल, तर त्याच्या कर्णाची लांबी किती?

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

उत्तर :- (B) 13

(3) पुढीलपैकी कोणत्या तारखेतील संख्या हे पायथागोरसचे त्रिकूट आहे?

(A) 15/08/17

(B) 16/08/16

(C) 3/5/17

(D) 4/9/15

उत्तर :- (A) 15/08/17

(4) बाजूच्या लांबी a, b, c असलेल्या त्रिकोणामध्ये जर $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ असेल, तर तो कोणत्या प्रकारचा त्रिकोण असेल?

(A) विशालकोन त्रिकोण

(B) लघुकोन त्रिकोण

(C) काटकोन त्रिकोण

(D) समभुज त्रिकोण

उत्तर :- (C) काटकोन त्रिकोण

(5) एका चौरसाचा कर्ण $10\sqrt{2}$ सेमी असल्यास त्याची परिमिती ___ असेल.

(A) 10 सेमी

(B) $40\sqrt{2}$ सेमी

(C) 20 सेमी

(D) 40 सेमी

उत्तर :- (D) 40 सेमी

(6) एका काटकोन त्रिकोणात कर्णावरील शिरोलंबामुळे कर्णाचे 4 सेमी व 9 सेमी लांबीचे दोन भाग होतात, तर त्या शिरोलंबाची लांबी किती?

(A) 9 सेमी (B) 4 सेमी (C) 6 सेमी (D) $2\sqrt{6}$ सेमी

उत्तर :- (C) 6 सेमी

(7) काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 24 सेमी व 18 सेमी असतील, तर त्याच्या कर्णाची लांबी ___ असेल.

(A) 24 सेमी (B) 30 सेमी (C) 15 सेमी (D) 18 सेमी

उत्तर :- (B) 30 सेमी

(8) ΔABC मध्ये $AB = 6\sqrt{3}$ सेमी , $AC = 12$ सेमी आणि $BC = 6$ सेमी, तर $<$ A चे माप किती?

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

उत्तर :- (A) 30°

प्र 2. पुढील उदाहरणे सोडवा :

(1) एका समभुज त्रिकोणाची बाजू 2a आहे, तर त्याची उंची काढा.

रीत : समभुज त्रिकोणाची बाजू = 2a ___(दिले आहे)

समभुज त्रिकोणाची उंची = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ बाजू

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$

$= \sqrt{3a}$

उत्तर : समभुज त्रिकोणाची उंची = $\sqrt{3a}$ आहे.

(2) 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी बाजू असलेला त्रिकोण हा काटकोन त्रिकोण होईल का? सकारण लिहा.

रीत : 7 सेमी, 24 सेमी व 25 सेमी यांमध्ये सर्वांत मोठी बाजू 25 सेमी ही आहे.

$\therefore\ 25^2 = 625$ आणि $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$

$\therefore\ 25^2 = 7^2 + 24^2$

उत्तर : पायथागोरसच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार, दिलेला त्रिकोण हा काटकोन त्रिकोण आहे.

(3) आयताच्या बाजू 11 सेमी व 60 सेमी असतील, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

रीत : आयताच्या कर्णामुळे त्याचे दोन एकरूप काटकोन त्रिकोणांत विभाजन होते. यांपैकी एका काटकोन त्रिकोणाचा विचार करता, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

कर्ण^2 = पहिली बाजू^{2} + दुसरी बाजू^{2}

$= 11^2 + 60^2$

$= 121+3600$

$= 3721$

$= \sqrt{3721} = 61$

उत्तर : कर्णाची लांबी = 61 सेमी आहे.

(4) एका काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 9 सेमी व 12 सेमी आहेत, तर त्या त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी काढा.

रीत : दिलेल्या काटकोन त्रिकोणात, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

कर्ण^2 = पहिली बाजू^{2} + दुसरी बाजू^{2}

$= 9^2 + 12^2$

= 81 + 144

= 225

$= \sqrt{225}$ = 15 सेमी

उत्तर : कर्णाची लांबी = 15 सेमी आहे.

(5) समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाची बाजू x आहे, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

रीत : समद्विभुज काटकोन त्रिकोणातील कोनांची मापे 45°, 45° व 90° अशी असतात.

45°-45°-90° त्रिकोणाच्या प्रमेयावरून,

समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाच्या बाजूची लांबी

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times$ कर्णाची लांबी

$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}} \times$ कर्णाची लांबी

$\therefore$ कर्णाची लांबी $= \sqrt{2x}$

कर्णाची लांबी = $\sqrt{2x}$ आहे.

प्र 3. Δ RST मध्ये, < S = 90°, < T = 30°, RT = 12 सेमी तर RS व ST काढा.

उत्तर : Δ RST मध्ये , < S = 90°, < T = 30°, RT = 12 सेमी ___ (दिले आहे)

<R = 60°, ____(उरलेला कोन)

∴ Δ RST मध्ये, 30°- 60° – 90° मापाचा त्रिकोण आहे.

Δ RST मध्ये ,

30°- 60° – 90° त्रिकोणाच्या प्रमेयानुसार,

$SR = \frac{1}{2} RT$ ___(30° कोनासमोरील बाजू)

$= \frac{1}{2} \times 12$

= 6 सेमी

तसेच,

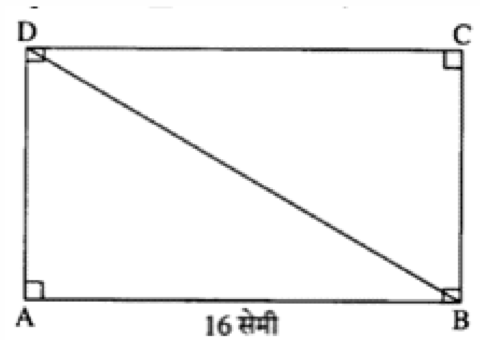
$ST = \frac{\sqrt{3}}{2} RT$ ___(60° कोनासमोरील बाजू)

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12$

$= 6\sqrt{3}$ सेमी.

उत्तर : RS = 6 सेमी व ST = $6\sqrt{3}$ सेमी आहे.

4. आयताचे क्षेत्रफळ 192 चौसेमी असून, त्याची लांबी 16 है सेमी आहे, तर आयताच्या कर्णाची लांबी काढा.



रीत : आकृतीतील ■ ABCD हा इष्ट आयत मानू.

मग, A(■ABCD) = 192 चौसेमी, लांबी = AB व रुंदी = AD

A(■ABCD) = $AB \times AD$ ____(सूत्रावरून)

$\therefore 192 = 16 \times AD$

$\therefore AD = \frac{192}{16}$= 12 सेमी

आता, Δ DAB मध्ये, < DAB = 90° ____(आयताचा कोन)

ΔDAB मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$DB^2 = AD^2 + AB^2$

$DB^2 = 12^2 + 16^2$

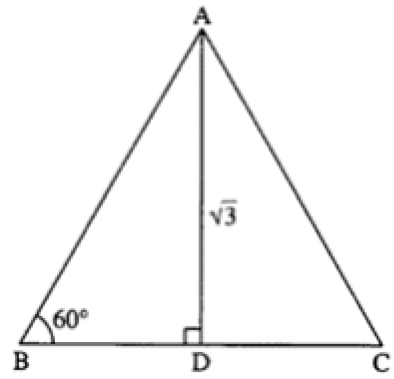
= 144 × 256

= 400

$\therefore DB = 20$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

उत्तर : आयताच्या कर्णाची लांबी = 20 सेमी आहे.

5. एका समभुज त्रिकोणाची उंची $\sqrt{3}$ सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाच्या बाजूची लांबी व परिमिती काढा.



रीत : आकृतीतील Δ ABC हा इष्ट समभुज त्रिकोण मानू.

मग, उंची (h) = AD

$= \sqrt{3}$ सेमी

रेख AD ⊥पाया BC.

$\therefore \ \Delta\, ADB = 90°$

$< B = 60°$ ____(समभुज त्रिकोणाचा कोन)

$\therefore < BAD = 30°$ _____(Δ ADB चा उरलेला कोन)

∴ Δ ADB हा 30°- 60° – 90° मापाचा त्रिकोण आहे.

∴ Δ ADB मध्ये, 30°- 60° – 90° त्रिकोणाच्या प्रमेयानुसार,

$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}\ AB$ ___(60° कोनासमोरील बाजू)

$\therefore \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$

$\therefore AB = \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$ ....(1)

समभुज त्रिकोणाच्या सर्व बाजूंची लांबी समान असते.

∴ AB = BC = AC = 2 सेमी ____ [(1) वरून]

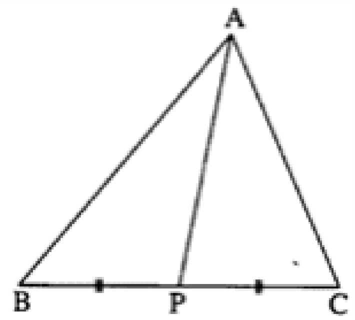
ΔABC ची परिमिती = AB + BC + AC

= 2 + 2 + 2 = 6सेमी

उत्तर : समभुज त्रिकोणाच्या बाजूची लांबी = 2 सेमी व परिमिती = 6 सेमी आहे.

6. ΔABC मध्ये, रेख AP ही मध्यगा आहे. जर BC

18, $AB^2 + AC^2 = 260$, तर AP काढा.



रीत : ΔABC मध्ये, रेख AP ही मध्यगा आहे.

$\therefore BP = \frac{1}{2} BC$

$\therefore BP = \frac{1}{2} \times 18 = 9$

$AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2BP^2$ _____(अपोलोनियसचे प्रमेय)

$\therefore 260 = 2AP^2 + 2(9)^2$ _____(दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore 260 = 2AP^2 + 2 \times 81$

$\therefore 260 = 2AP^2 + 162$

$\therefore 2AP^2 = 260 - 162 = 98$

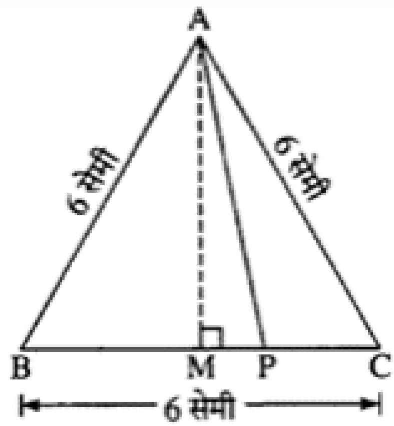
$\therefore AP^2 = \frac{98}{2}$

$\therefore AP^2 = 49$

$\therefore AP = 7$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

उत्तर : AP = 7 आहे.

7. Δ ABC हा समभुज त्रिकोण आहे. पाया BC वर P बिंदू असा आहे की, $PC = \frac{1}{3} BC$. जर AB = 6 सेमी, तर AP काढा.



उत्तर :

रचना : रेख AM ⊥ बाजू BC काढा.

रीत : Δ ABC हा समभुज त्रिकोण आहे. ____(दिले आहे)

∴ AB = BC = AC = 6 सेमी ____(1)

समभुज त्रिकोणात शिरोलंब पायाला दुभागतो.

∴ BM = MC = 3 सेमी ____ (2)

तसेच, $PC = \frac{1}{3} BC$ ____(दिले आहे)

$PC = \frac{1}{3} \times 6$ ___(BC = 6 सेमी)

∴ PC = 2 सेमी ____ (3)

आता, M-P-C ___(आकृतीवरून)

$\therefore$ MC = MP+ PC

$\therefore \quad 3 = MP + 2$ ___(2) व (3) वरून

$\therefore$ MP = 3 - 2 = 1 ____(4)

रेख AM ⊥ बाजू BC ____(रचना)

< AMC = 90∘

Δ AMC या काटकोन त्रिकोणात, पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

कर्ण^2 = पहिली बाजू^{2} + दुसरी बाजू^{2}

$AC^2 = AM^2 + MC^2$

$6^2 = AM^2 + 3^2$ ____(किमती भरून)

$\therefore 36 = AM^2 + 9$

$\therefore \ AM^2 = 36 - 9 = 27$ ____(5)

आता, Δ AMP या काटकोन त्रिकोणात, पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$AP^2 = AM^2 + MP^2$

$\therefore \ AP^2 = 27 + 1^2$ ____(5) व (4) वरुन

$= 27 + 1 = 28$

$\therefore AP = \sqrt{28}$ ___(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\therefore AP = \sqrt{4 \times 7}$

$\therefore AP = \sqrt{4} \times \sqrt{7}$

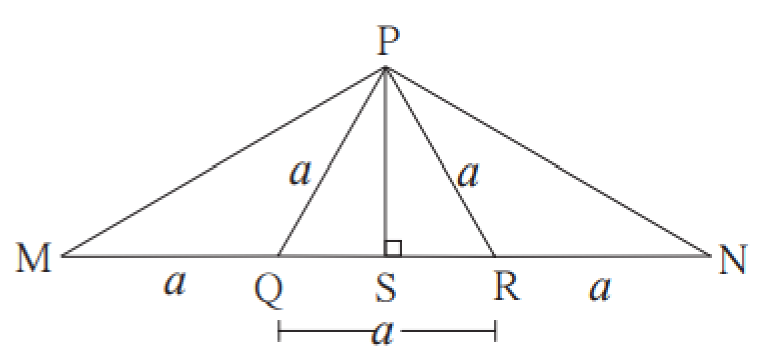
$\therefore AP = 2\sqrt{7}$ सेमी

AP = $2\sqrt{7}$ सेमी आहे.

8. आकृतीमध्ये, M-Q-R-N. दिलेल्या माहितीवरून सिद्ध करा :

PM= PN=$\sqrt{3} \times a$.

उत्तर :



सिद्धता : समभुज Δ PMR ची भुजा a एकक आहे आणि रेख PS ⊥ बाजू QR

__पक्ष

$\therefore$ रेख PS ही समभुज Δ PQR ची उंची आहे.

$\therefore$ PS = $\frac{\sqrt{3}}{2}$a ___(1)

आणि QS= $\frac{1}{2}$a ___समभुज त्रिकोणाचा शिरोलंब हा पायाला दुभागतो)___(2)

MS = MQ + QS ___(M-Q-S)

= *a* + $\frac{1}{2}$ *a* ___(2) वरुन

$\therefore MS = \frac{3}{2}\ a$ __(3)

आता काटकोन $\Delta\ PSM$ मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$PM^2 = \ PS^2 + MS^2$

$= (\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 \ + (\frac{3}{2}a)^2$ ___(1) व (3) वरुन

$= \frac{3a^2}{4} + \frac{9a^2}{4}$

$= 3a^2$

$\therefore PM = \ \sqrt{3}\ a$ __(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेउन)__(4)

यानंतर, Δ PSM व Δ PSN मध्ये,

रेख PS≅ रेख PS __(सामाईक भुजा)

$<PSM \cong <PSN$ __(प्रत्येकी 90°)

रेख MS ≅ रेख NS __(प्रत्येकी $\frac{3}{2}a$ लांबी)

Δ PSM ≅ Δ PSN __(बाकोबा एकरुपता कसोटी)

$\therefore$ रेख $PM \cong$ रेख PN __(एकरुप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

$\therefore PM = PN$

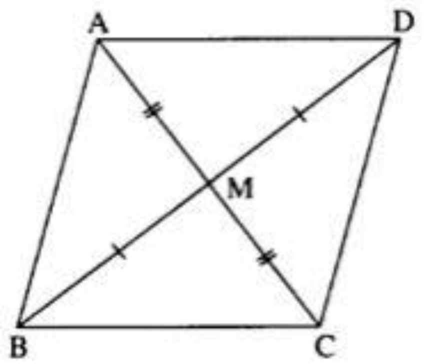
$\therefore PN = \sqrt{3} \times a$ __ *(4 वरुन)*__*(5)*

$\therefore PM = PN = \sqrt{3} \times a$ ___ *(4) व (5) वरुन*

9. सिद्ध करा : समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णांच्या वर्गांची बेरीज ही त्या चौकोनाच्या बाजूच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर असते.

उत्तर :

पक्ष : ■ABCD या समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण AC व कर्ण BD हे परस्परांना M या बिंदूत छेदतात.



साध्य :

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$

सिद्धता : ■ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

∴ AB = BC = CD = AD ____ (1)

समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

∴ M हा बिंदू कर्ण AC व कर्ण BD यांचा मध्यबिंदू आहे.

∴ BM = $\frac{1}{2}$ BD व कर्ण AM = $\frac{1}{2}$ AC ____ (2)

Δ ABD मध्ये, बाजू BD चा M हा मध्यबिंदू आहे.

∴ $AB^2 + AD^2 = 2AM^2 + 2BM^2$ ____(अपोलोनियसचे प्रमेय)

∴ $AB^2 + AD^2 = 2(\frac{1}{2}AC)^2 + 2(\frac{1}{2}BD)^2$ ____*(2) वरुन*

$\therefore\ AB^2 + AD^2 = 2 \times \frac{1}{4}AC^2 + 2 \times \frac{1}{4}BD^2$

$= \frac{AC^2}{2} + \frac{BD^2}{2}$

$\therefore\ 2AB^2 + 2AD^2 = AC^2 + BD^2$ ____(दोन्ही बाजूंना 2 ने गुणून)

$\therefore\ AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ ____[(1) वरुन

$2AB^2 = AB^2 + BC^2$ व

$2AD^2 = AD^2 + CD^2$]

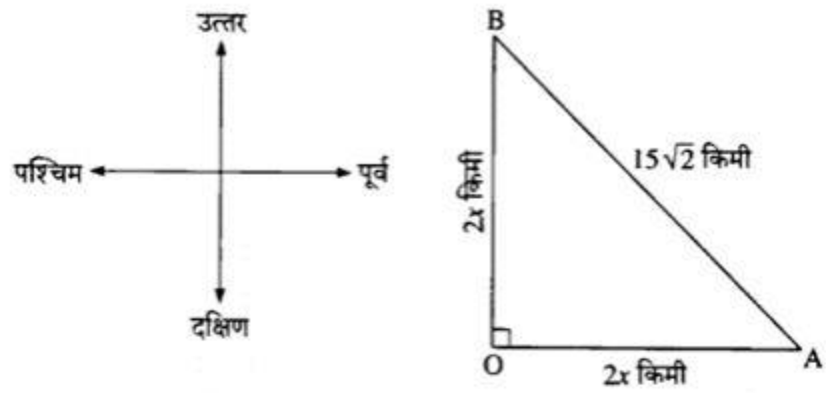
$\therefore\ AB^2 + BC^2 + DA^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

म्हणजेच, समांतरभुज चौकोनाच्या कर्जाच्या वर्गांची बेरीज ही त्या चौकोनाच्या बाजूच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर असते.

10. प्रणाली आणि प्रसाद एकाच ठिकाणावरून पूर्व आणि उत्तर दिशेला सारख्या वेगाने निघाले.दोन तासांनंतर त्यांच्या मधील अंतर 15 $\sqrt{2}$ कि मी असेल तर त्यां चा ताशी वेग काढा.

उत्तर :

रीत : समजा, प्रणाली व प्रसाद O या एकाच ठिकाणावरून पूर्व आणि उत्तर दिशेला सारख्याच वेगाने निघाले.



प्रणाली व प्रसादचा वेग सारखाच आहे.

त्यांचा वेग ताशी x किमी मानू.

अंतर = वेग × वेळ या सूत्रानुसार,

2 तासांत प्रसादने कापलेले अंतर = 2x किमी

व 2 तासांत प्रणालीने कापलेले अंतर = 2x किमी.

2 तासांनंतर प्रसाद A या ठिकाणी व प्रणाली B या ठिकाणी आले.

AB हे दोन तासांनंतर त्यांच्यातील अंतर आहे.

OA ⊥ OB ___ (आकृतीवरून)

आता, OA = 2x किमी, OB = 2x किमी, AB = $15\sqrt{2}$ किमी.

Δ AOB या काटकोन त्रिकोणात, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$OA^2 + OB^2 = AB^2$

$\therefore (2X)^2 + (2X)^2 = (15\sqrt{2})^2$

$\therefore 4X^2 + 4X^2 = 225 \times 2$

$\therefore 8X^2 = 450$

$\therefore X^2 = \frac{450}{8}$

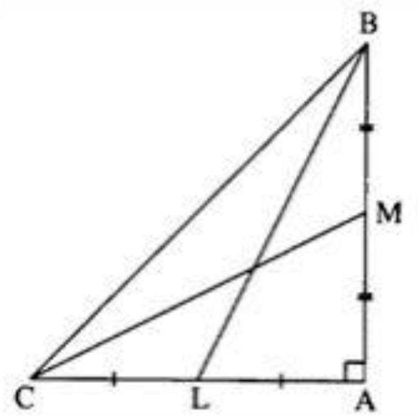
$\therefore X^2 = \frac{225}{4}$

$\therefore X = \frac{15}{2}$ ______ (दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$X = 7.5$

प्रणाली आणि प्रसादचा वेग ताशी 7.5 किमी आहे.

11. Δ ABC मध्ये < BAC = 90°, रेख BL व रेख CM या D ABC च्या मध्यगा आहेत, तर सिद्ध कराः $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$



उत्तर : सिद्धता : Δ ABC मध्ये,

$< BAC = 90°$ ____(दिले आहे)

Δ ABC मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ ____ (1)

त्याचप्रमाणे, Δ CAM या काटकोन त्रिकोणात, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$MC^2 = AM^2 + AC^2$

$\therefore MC^2 = (\frac{1}{2}AB^2)^2 + AC^2$ ___ (बाजू AB चा M हा मध्यबिंदू)

$\therefore MC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + AC^2$

$\therefore 4MC^2 = AB^2 + 4AC^2$ _____(4 ने गूणून)___(2)

त्याचप्रमाणे, Δ ALB मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$BL^2 = AL^2 + AB^2$

$\therefore BL^2 = (\frac{1}{2}AC^2)^2 + AB^2$ ___ (बाजू AC चा L हा मध्यबिंदू)

$\therefore BL^2 = \frac{1}{4}AC^2 + AB^2$

$\therefore 4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$ _____(4 ने गूणून)___(3)

(2) व (3) ची बेरीज करू.

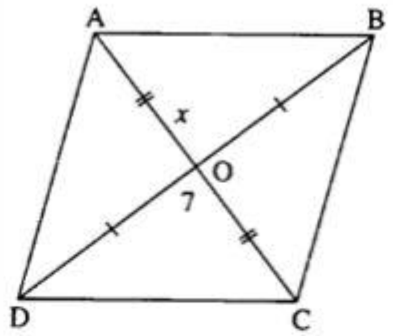
$4MC^2 + 4BL^2 == AB^2 + 4AC^2 + AC^2 + 4AB^2$

$\therefore (4BL^2 + 4CM^2) = 5AB^2 + 5AC^2$

$\therefore 4(BL^2 + CM^2) = 5(AB^2 + AC^2)$

$\therefore 4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$ ____ (1) वरुन

12. एका समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज 130 सेमी असून, त्याच्या एका कर्णाची लांबी 14 सेमी आहे, तर त्याच्या दुसऱ्या कर्णाची लांबी किती ?



उत्तर :

रीत : ■ABCD या समांतरभुज चौकोनात, AB व AD या लगतच्या बाजू असून, कर्ण AC व कर्ण BD हे परस्परांना O या बिंदूत छेदतात.

$AB^2 + AD^2$ = 130 सेमी , BD = 14 सेमी

समजा, कर्ण AC = 2x सेमी.

समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

∴ OB = OD = 7 सेमी व OA = OC = x सेमी.

Δ ABD ची रेख AO ही मध्यगा आहे.

∴ $AB^2 + AD^2 = 2AO^2 + 2OB^2$ ____(अपोलोनियसचे प्रमेय)

$\therefore 130 = 2.X^2 + 2(7)^2$ ____(किमती भरून)

$\therefore 65 = X^2 + 7^2$ ___(2 ने दोन्ही बाजूंना भागून)

$\therefore 65 = X^2 + 49$

$\therefore X^2 = 65 - 49 = 16$

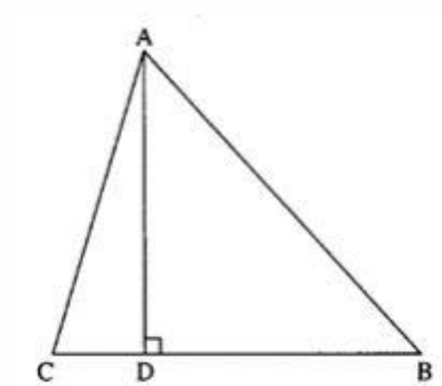
$\therefore x = 4$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन).

$\therefore AC = 2X = 2 \times 4 = 8$

<u>दुसऱ्या कर्णाची लांबी 8 सेमी आहे.</u>

13. Δ ABC मध्ये, रेख AD $\perp$ रेख BC आणि DB = 3CD,

तर सिद्ध करा : $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$



उत्तर :

सिद्धता :

CB = CD + DB ____(C-D-B)

CB = CD + 3CD ____ (DB = 3CD, दिले आहे)

∴ CB = 4CD ____(1)

Δ ADC मध्ये , <ADC = 90°

Δ ADC या काटकोन त्रिकोणामध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ ____(2)

त्याचप्रमाणे, Δ ADB मध्ये,

$AB^2 = AD^2 + DB^2$ ____(3)

समीकरण (3) मधून समीकरण (2) वजा करून,

$AB^2 - AC^2 = AD^2 + DB^2 - AD^2 + CD^2$

$AB^2 - AC^2 = DB^2 - CD^2$

$\therefore AB^2 - AC^2 = (DB + CD)(DB - CD)$

$\therefore AB^2 - AC^2 = (BC)(3CD - CD)$

$= BC(2CD)$

$\therefore AB^2 - AC^2 = BC(\frac{BC}{2})$ ____(1) वरुन

$\therefore AB^2 - AC^2 = \frac{BC^2}{2}$

$\therefore 2AB^2 - 2AC^2 = BC^2$ ____(2 ने गुणून)

$\therefore 2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$

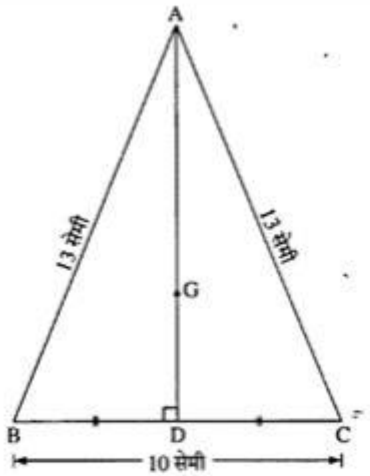
14. समद्विभुज त्रिकोणामध्ये, एकरूप बाजूंची लांबी 13 सेमी असून, त्याचा पाया 10 सेमी आहे; तर त्या त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातापासून पायाच्या समोरील शिरोबिंदूपर्यंतचे अंतर काढा.

उत्तर :

रीत : आकृतीतील Δ ABC हा इष्ट समद्विभुज त्रिकोण मानू.

मग, AB = AC = 13 सेमी. Δ ABC या समद्विभुज त्रिकोणात मध्यगा तसेच शिरोलंब पायाला दुभागतात.

$\therefore$ BD = DC = 5 सेमी ____ (BC = 10 सेमी)



Δ ABC मध्ये, रेख AD ही मध्यगा.

$\therefore\ AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$ ____(अपोलोनियसचे प्रमेय)

$\therefore\ 13^2 + 13^2 = 2AD^2 + 2(5)^2$ ____(किमती भरून)

$\therefore\ 169 + 169 = 2AD^2 + 50$

$\therefore\ 338 = 2AD^2 + 50$

$2AD^2 = 338 - 50 = 288$

$\therefore\ AD^2 = \frac{288}{2} = 144$

$\therefore\ AD = 12$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

मध्यगा AD वरील बिंदू G हा मध्यगासंपात बिंदू आहे.

मध्यगासंपात बिंदू हा मध्यगेला 2 : 1 या प्रमाणात विभागतो.

$\therefore \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$

$\therefore \frac{AD+GD}{GD} = \frac{2+1}{1}$ ____(योग क्रियेने)

$\therefore \frac{AD}{GD} = \frac{3}{1}$ ____(A-G-D)

$\therefore \frac{12}{GD} = \frac{3}{1}$

$\therefore GD = \frac{12}{3} = 4$ सेमी

आता, AG + GD= AD ____(A-G-D)

$\therefore AG + 4 = 12$

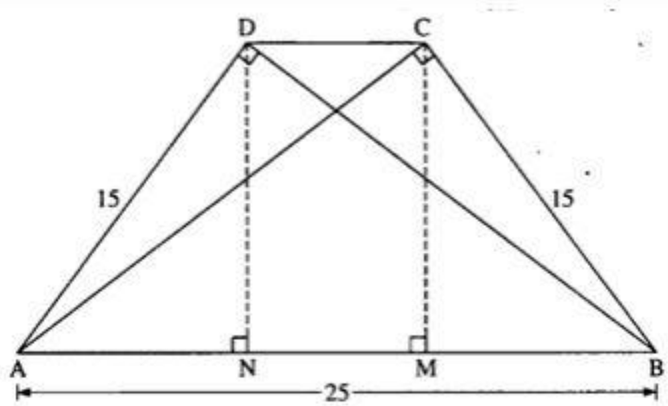
$\therefore AF = 12 - 4$

$\therefore AG = 8$ सेमी

त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातापासून पायाच्या समोरील शिरोबिंदूपर्यंतचे अंतर

= 8 सेमी आहे.

15. समलंब चौकोन ABCD मध्ये, रेख AB || रेख DC, रेख BD ⊥ रेख AD, रेख AC ⊥ रेख BC, जर AD = 15, BC = 15 आणि AB = 25 असेल, तर A(■ABCD) किती ?



उत्तर :

रचना : रेख DN ⊥ बाजू AB काढा आणि रेख CM ⊥ बाजू AB काढा.

रीत : Δ ADB मध्ये, <ADC = 90° ____(दिले आहे)

Δ ADB या काटकोन त्रिकोणात, पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$AB^2 = AD^2 + DB^2$

$\therefore\ 25^2 = 15^2 + DB^2$ ___(दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore 625 = 225 + DB^2$

$\therefore\ DB^2 = 625 - 225 = 400$

$\therefore DB = 20$ ____ (दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

वरीलप्रमाणेच कृती करून, काढता येईल की, CA = 20.

आता, A(Δ ADB) = $\frac{1}{2} \times$ काटकोन करणाऱ्या बाजूंचा गुणाकार

$= \frac{1}{2} \times AD \times DB$

$= \frac{1}{2} \times 15 \times 20$

= 150 चौएकक ____ (1)

तसेच A(Δ ADB) = $\frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ ऊंची

$\therefore$ A(Δ ADB) = $\frac{1}{2} \times AB \times DN$

$\therefore 150 = \frac{1}{2} \times 25 \times DN$ ___ (दिलेल्या किमती भरून व (1) वरून)

$\therefore \; DN = \frac{15 \times 2}{25} = 6 \times 2 = 12$ _____(2)

त्याचप्रमाणे कृती करून, CM = 12____(3)

आता, Δ DNA या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$DA^2 = DN^2 + AN^2$

$\therefore \; 15^2 = 12^2 + AN^2$ ___(दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore 225 = 144 + AN^2$

$\therefore \; AN^2 = 225 - 144 = 81$

$\therefore AN = 9$ ____ (दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

त्याचप्रमाणे कृती करून, BM = 9.

$\therefore$ AB = AN + NM + MB ____ (A-N-M-B)

25 = 9 + NM + 9 ___ (दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore$ 25 = 18 + NM

$\therefore$ NM = 7 ____(4)

रेख DC || रेख AB ____(दिले आहे)

रेख DN ही छेदिका.

$< NDC + < DNM = 180°$ ____ (आंतरकोन)

$< NDC + 90° = 180°$

$\therefore < NDC = 90°$

त्याचप्रमाणे, <MCD = 90°

■ NMCD चा प्रत्येक कोन काटकोन आहे व

DN = CM __ (2) व (3) वरून

■ NMCD हा आयत आहे.

$\therefore NM = DC$ ____ (आयताच्या संमुख बाजू)

$\therefore DC = 7$ ___(4) वरून ___(5)

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × समांतर बाजूची बेरीज × ऊंची

$$A(\blacksquare\ ABCD) = \frac{1}{2}(AB + DC) \times DN$$

$= \frac{1}{2}(25 + 7) \times 12$ _(5)(2) व पक्षावरून

$= \frac{1}{2}(32) \times 12$

$= 16 \times 12$

= 192 चौएकक

A(■ ABCD) = 192 चौएकक आहे.

16. आकृतीमध्ये D PQR हा समभुज त्रिकोण असून बिंदू S हा रेख QR वर अशा प्रकारे आहे की, QS = $\frac{1}{3}$QR तर सिद्ध करा; $9PS^2 = 7PQ^2$

उत्तर :

रचना : रेख ⊥ बाजू QR काढा.

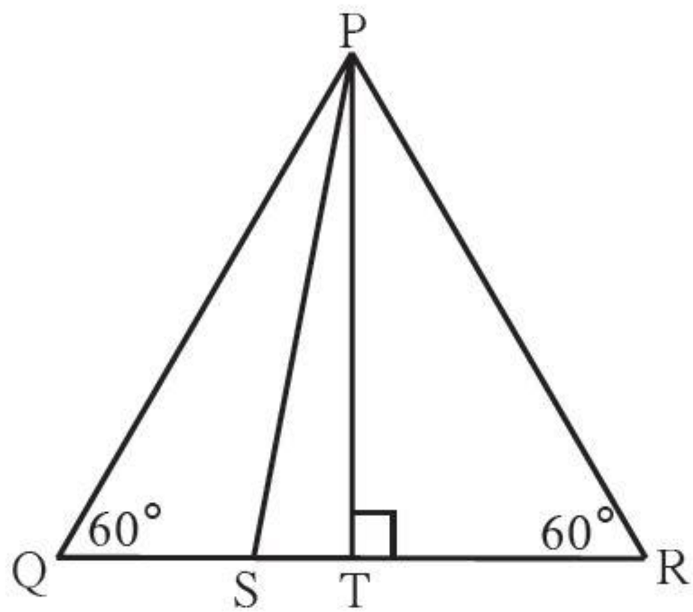
सिद्धता : रेख PT ही समभुज Δ PQR ची उंची आहे.

$\therefore PT = \frac{\sqrt{3}}{2} QR$ ____(1)

समभुज त्रिकोणात शिरोलंब हा संमुख भुजेला दुभागतो.

$\therefore QT = \frac{1}{2} QR$ ____(2)

व $QS = \frac{1}{3}$ QR ____पक्ष__(3)



$\therefore$ (2) व (3) वरून,

$QT - QS = \frac{1}{2} QR - \frac{1}{3} QR = \frac{1}{6} QR$

परंतु, QT - QS = TS ___(Q-S-T)

$\therefore TS = \frac{1}{6} QR$ _____ (4)

आता, काटकोन Δ PTS मध्ये,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$PS^2 = PT^2 + ST^2$

$= (\frac{\sqrt{3}}{2} QR)^2 + (\frac{1}{6} QR)^2$ ____(1) व (4) वरून

$= \frac{3}{4} QR^2 + \frac{1}{36} QR^2$

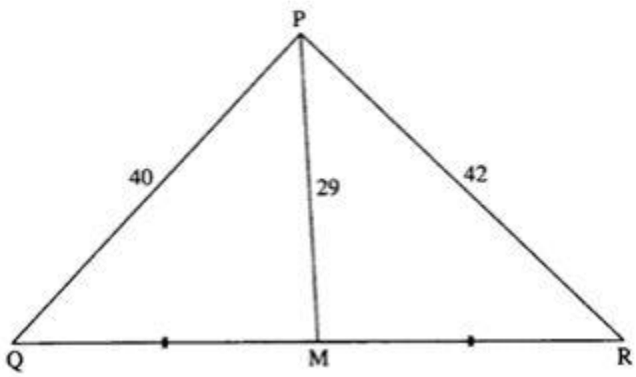
$= \frac{27QR^2}{36} + \frac{1}{36} QR^2$

$= \frac{28}{36} QR^2$

$\therefore PS^2 = \frac{7}{9} QR^2$ ____(QR=PQ)

$\therefore 9PS^2 = 7PQ^2$

17. रेख PM ही Δ PQR ची मध्यगा आहे. जर PQ = 40, PR = 42 आणि PM = 29, तर QR काढा.



रीत : रेख PM ही Δ PQR ची मध्यगा आहे. ____(दिले आहे)

$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$ ____(अपोलोनियसचे प्रमेय)

$\therefore\ 40^2 + 42^2 = 2(29)^2 + 2QM^2$ ________ (दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore 1600 + 1764 = 2 \times 841 + 2QM^2$

$\therefore 3364 = 1682 + 2.QM^2$

$\therefore 3364 - 1682 = 2QM^2$

$\therefore 2QM^2 = 1682$

$\therefore QM^2 = \frac{1682}{2}$

$\therefore QM^2 = 841$

$\therefore\ QM = 29$ ___(दोन्ही बाजूंची वर्गमूळे घेऊन)___(1)

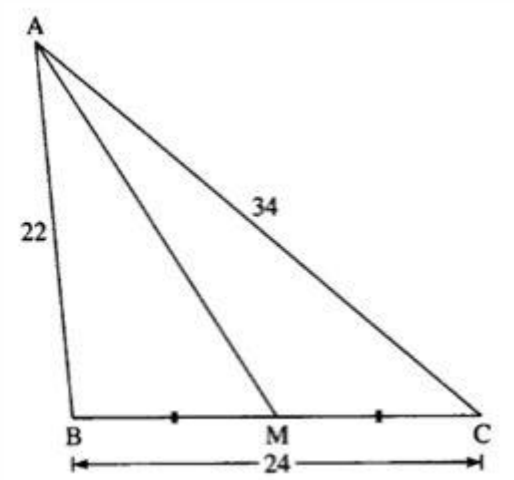
$\therefore\ QR = 2QM$ ___(बाजू QR चा M हा मध्यबिंदू)

$\therefore\ QR = 2\ \times 29 = 58$

$\therefore\ QR = 58$ आहे

18. रेख AM ही Δ ABC ची मध्यगा आहे. जर AB = 22, AC = 34, BC = 24; तर बाजू AM ची लांबी काढा.

रीत : रेख AM ही Δ ABC ची मध्यगा आहे. ____(दिले आहे)



बाजू BC चा M हा मध्यबिंदू आहे व B-M-C.

∴ BM = MC = 12 ____ (BC = 24)

Δ ABC मध्ये,

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$ ___ (अपोलोनियसचे प्रमेय)

$22^2 + 34^2 = 2AM^2 + 2(12)^2$ ____(दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore 484 + 1156 = 2AM^2 + 2 \times 144$

$1640 = 2AM^2 + 288$

$\therefore 2AM^2 = 1640 - 288 = 1352$

$\therefore AM^2 = \frac{1352}{2} = 676$

$\therefore AM = 26$ ________ (दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

AM = 26 आहे.