3. वर्तुळ

सरावसंच 3.1

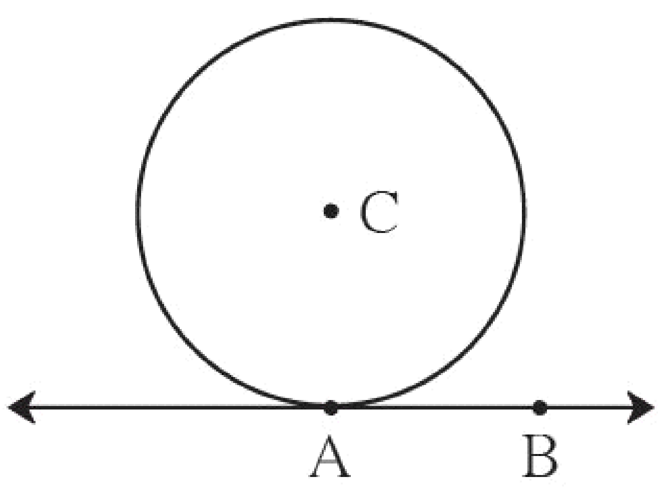
प्र.1 आकृतीत, केंद्र C असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 6 सेमी आहे. रेषा AB या वर्तुळाला बिंदू A मध्ये स्पर्श करते. या माहितीवरून खालील प्रश्नां ची उत्तरे द्या.

(1) $\angle CAB$ चे माप किती अंश आहे? का?

(2) बिंदू C हा रेषा AB पासून किती अंतरावर आहे? का?

(3) जर $d(A,B) = 6$ सेमी, तर $d(B,C)$ काढा.

(4) $\angle ABC$ चे माप किती अंश आहे? का?



उत्तर : (1) रेख CA व रेख CB काढा

$\angle$ CAB = 90° ....(स्पर्शिका त्रिज्या प्रमेय)

(2) त्रिज्या CA **रेषा AB** ....(पक्षावरून)

CA = 6 सेमी __(दिले आहे)

∴ बिंदू C हा रेषा AB पासून 6 सेमी अंतरावर आहे. कारण हे बिंदू C पासून रेषा AB चे लंब अंत

(3) *d*(A,B)= 6 सेमी, म्हणजेच AB=6 सेमी

CA= 6 सेमी .....(दिले आहे)

Δ CAB या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरुन,

$CB^2 = CA^2 + AB^2$

$= 6^2 + 6^2$

$= 36 + 36$

$= 72$

$CB = \sqrt{72}$

$= \sqrt{36 \times 2}$ .....(दोन्ही बाजूची वर्गमूळे घेऊन)

$\therefore CB = 6\sqrt{2}$

d(B,C) = $6\sqrt{2}$ सेमी आहे.

(4) ABC मध्ये,

बाजू AB ≅ बाजू CA ___ (प्रत्येकी 6 सेमी).

व $< CAB = 90°$

$\therefore$ Δ ABC हा समद्विभुज काटकोन त्रिकोण आहे.

$< ABC = 45°$ ____ (Δ ABC हा समद्विभुज काटकोन त्रिकोण आहे)

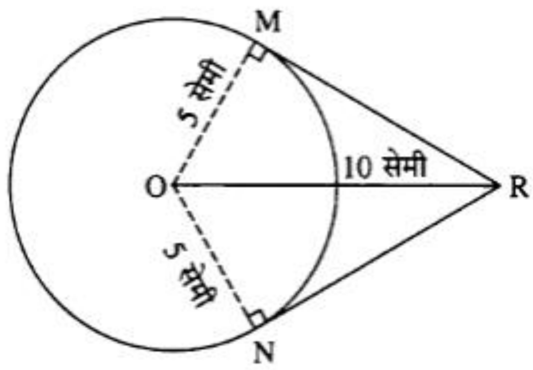
प्र.2 शेजारील आकृतीत, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यभागातील R या बिंदूपासून काढलेले RM आणि RN हे स्पर्शिकाखंड वर्तुळाला बिंदू M आणि N मध्ये स्पर्श करतात. जर OR = 10 सेमी व वर्तुळाची त्रिज्या 5 सेमी

असेल तर -

(1) प्रत्येक स्पर्शिकाखंडाची लांबी किती?

(2) < MRO चे माप किती?

(3) < MRN चे माप किती?



उत्तर : (1) रेखOM व रेखON काढा. त्रिज्या OM स्पर्शिकाखंड RM

(i) रेख OM व रेख ON काढा. त्रिज्या OM ⊥ स्पर्शिकाखंड RM

∴ < OMR = 90° ____ (स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय)

Δ OMR या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$OR^2 = OM^2 + MR^2$

$10^2 = 5^2 + MR^2$

$\therefore 100 = 25 + MR^2$ ____(किमती भरून)

$MR^2 = 100 - 25$

$= 75$

$\therefore MR = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3}$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\therefore MR = 5\sqrt{3}$ सेमी ____ (1)

रेख MR $\cong$ रेख NR ___(स्पर्शिकाखंडाच्या प्रमेयानुसार)

$\therefore MR = NR$ ____(2)

(1) व (2) वरून,

MR = NR = $5\sqrt{3}$ सेमी.

(ii) OM = 5 सेमी, OR = 10 सेमी

$OM = \frac{1}{2} OR$

$30° - 60° - 90°$ त्रिकोणाच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार,

$\angle MRO = 30°$

(iii) $\angle MRO \cong \angle NRO$ ____(एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन)

$\angle MRN = \angle MRO + \angle NRO$ ____(कोनांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

$30° + 30° = 60°$

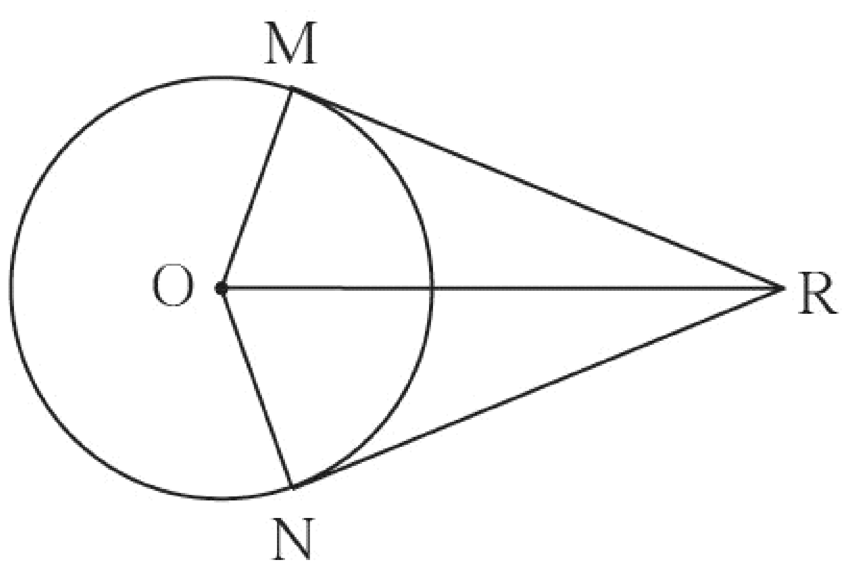
उत्तर :

(i) प्रत्येक स्पर्शिकाखंडाची लांबी = $5\sqrt{3}$ सेमी,

(ii) $< MRO = 30^\circ$ व

(iii) $< MRN = 60^\circ$ आहे.

प्र.3 रेख RM आणि रेख RN हे केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचे स्पर्शिकाखंड आहेत, तर रेख OR हा < MRN आणि < MON या दोन्ही कोनांचा दुभाजक आहे, हे सिद्ध करा.



उत्तर : रेख OM व रेख ON काढा.

सिद्धता : O केंद्र असलेल्या वर्तुळाचे रेख RM व रेख RN हे स्पर्शिकाखंड आहेत.

$< OMR = 90^\circ$

व $< ONR = 90^\circ$ ....(स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय)

$< OMR = 90^\circ$ व $< ONR = 90^\circ$ ____(स्पर्शिका - त्रिज्या प्रमेय)

ΔOMR व ΔONR मध्ये,

$< OMR \cong < ONR$ ____(प्रत्येकी 90° मापाचे)

रेख OM ≅ रेख ON ___(एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

रेख OR ≅ रेख OR ____(सामाईक भुजा)

$\therefore \Delta OMR \cong \Delta ONR$ ____(कर्ण – भुजा प्रमेय)

$\therefore < MRO \cong < NRO$ ____(एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन)

त्याचप्रमाणे $< ROM \cong < RON$ ____(एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन)

रेख OR हा < MRN आणि < MON या दोन्ही कोनांचा दुभाजक आहे.

प्र.4 त्रिज्या 4.5 सेमी असलेल्या वर्तुळाच्या दोन स्पर्शिका परस्परांना समांतर आहेत. तर त्या स्पर्शिकांतील अंतर किती हे सकारण लिहा.

उत्तर : O हे वर्तुळ केंद्र असलेल्या वर्तुळात स्पर्शिका AB व स्पर्शिका CD या वर्तुळाला अनुक्रमे M व N या बिंदूंत स्पर्श करतात. रेख OM व C N रेख ON या त्रिज्या आहेत.

रेषा XY || रेषा AB काढा. _____ (रचना)

रेषा AB || रेषा CD काढा. ____(दिले आहे.)

∴ रेषा AB || रेषा XY || रेषा CD

< OMA = < ONC = 90 ° ___(स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय)

रेषा AB || रेषा XY व रेषा MO ही त्यांची छेदिका.

∴ < AMO + < MOX = 180 ° ____(आंतरकोन कसोटी)

∴ 90° + < MOX = 180°

∴ < MOX = 180° - 90°

∴ < MOX = 90°

त्याचप्रमाणे सिद्ध करता येईल की, < NOX = 90°

∴ < MOX + < NOX = 90° + 90°

∴ < MOX + < NOX = 180°

< MOX व < NOX लगतचे कोन असून, परस्परांचे पूरक आहेत.

∴ < MOX व < NOX रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

∴ किरण OM व किरण ON विरुद्ध किरणे आहेत.

∴ बिंदू M, O व N एकरेषीय आहेत.

स्पर्शिका AB व स्पर्शिका CD यांमधील रेख MN हे लंबांतर आहे. O वर्तुळकेंद्र असून रेख MN व्यास आहे.

MN= OM + ON= 4.5 + 4.5 = 9सेमी

स्पर्शिका AB व स्पर्शिका CD यांच्यातील लंबांतर 9 सेमी आहे.

उत्तर : स्पर्शिकांमधील अंतर 9 सेमी आहे.

सरावसंच 3.2

प्र.1 दोन अंतर्स्पर्शी वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 3.5 सेमी व 4.8 सेमी आहेत, तर त्यांच्या केंद्रांतील अंतर किती आहे?

उत्तर : समजा, लहान वर्तुळची त्रिज्या r_1 व मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या r_2 आहे.

$\therefore$ $r_1 = 3.5$ सेमी व $r_2 = 4.8$ सेमी

परस्परांना आतून स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांच्या केंद्रांतील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांच्या फरकाएवढे असते.

$\therefore$ केंद्रांतील अंतर $= r_2 - r_1$ ___$(r_2 > r_1)$

$= 4.8 - 3.5$

$= 1.3$ सेमी

उत्तर : केंद्रांतील अंतर 1.3 सेमी आहे.

प्र.2 बाह्यस्पर्शी असलेल्या दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 5.5 सेमी व 4.2 सेमी असतील तर त्यां च्या केंद्रांतील अंतर किती असेल?

उत्तर : समजा, त्या दोन वर्तुळाच्या त्रिज्या r_1 व r_2 आहेत.

∴ $r_1 = 5.5$ सेमी व $r_2 = 4.2$ सेमी

परस्परांना आतून स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांच्या केंद्रांतील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांच्या फरकाएवढे असते.

∴ केंद्रांतील अंतर = $r_2 - r_1$ ___$(r_2 > r_1)$

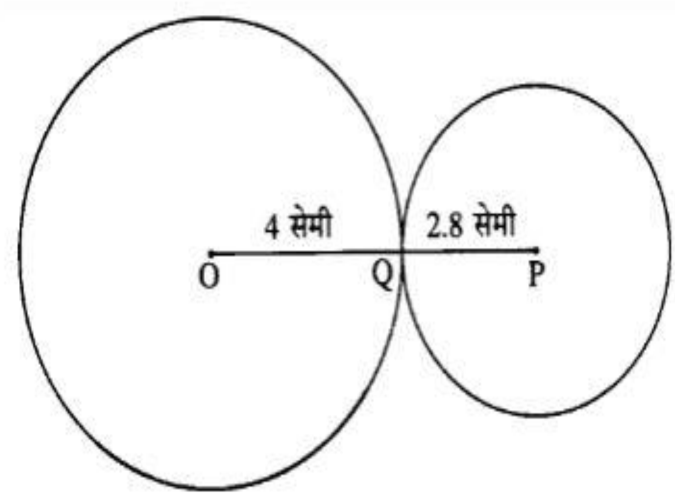
= 5.5 − 4.2

= 9.7 सेमी

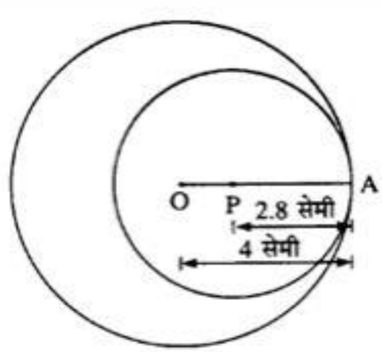
उत्तर : केंद्रांतील अंतर 9.7 सेमी आहे.

प्र.3 त्रिज्या अनुक्रमे 4 सेमी आणि 2.8 सेमी असणारी, (i) बाह्यस्पर्शी (ii) अंतर्स्पर्शी, वर्तुळे काढा.

उत्तर : (i) बाह्यस्पर्शी



(ii) अंतर्स्पर्शी



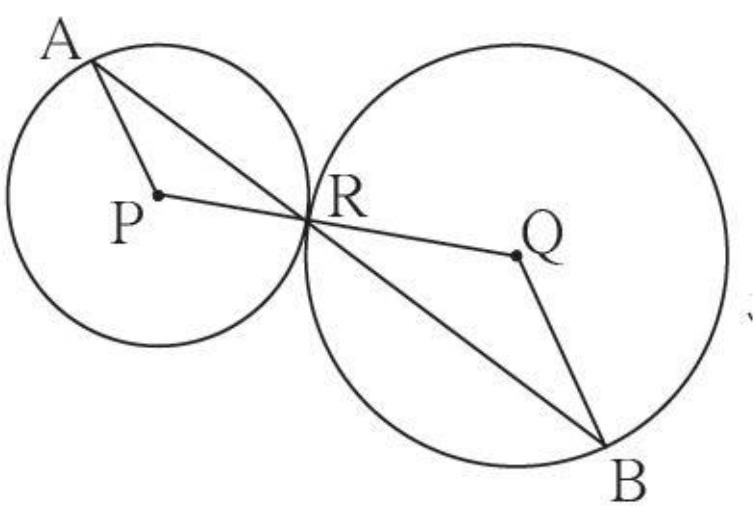
प्र.4 आकृतीमध्ये, केंद्र P आणि Q असलेली वर्तुळे परस्परांना बिंदू R मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू R मधून जाणारी रेषा त्या वर्तुळांना अनुक्रमे बिंदू A व बिंदू B मध्ये छेदते. तर -

(1) रेख AP || रेख BQ हे सि द् ध करा.

(2) Δ APR ~ Δ RQB हे सि द् ध करा.

(3) जर < PAR चे माप 35° असेल,

तर < RQB चे माप ठरवा.



उत्तर : I) Δ PAR व Δ QBR मध्ये,

रेख PA ≅ रेख PR

व रेख QB ≅ रेख QR ....(एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

< PAR ≅ < PRA

व < QBR ≅ < QRB ___ (समद्वीभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)___(1)

< PRA ≅ < QRB ___(विरुद्ध कोन)___(2)

∴ < PAR ≅ < QRB ___ (1) व (2) वरून (3)

म्हणजेच , < PAB ≅ < QBA ____(तेच कोन परंतु अंत्यबिंदू भिन्न)

रेख AP || रेख BQ ____ (संगत कोन कसोटीनुसार)

(ii) Δ APR व Δ BQR मध्ये,

< PRA ≅ < QRB ____(विरुद्ध कोन)

< PAR ≅ < QBR ____ (3) वरून

& Δ APR ~ Δ BQR _____(समरूपतेची कोको कसोटी)

(iii) Δ PAR मध्ये,

जर < PAR = 35° , तर < PRA = 35° ___[(1) वरून]

व < APR = 110° ___(Δ PAR चा उरलेला कोन)

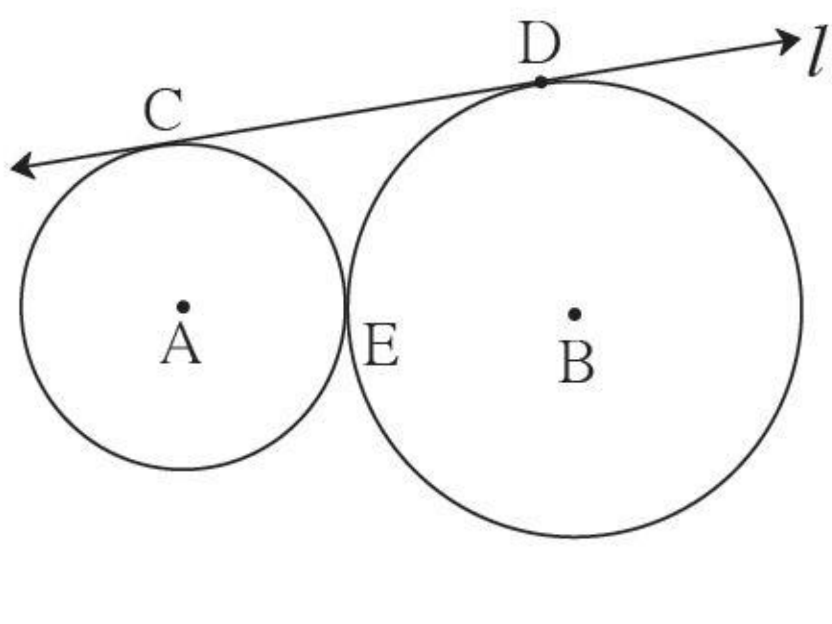
$\angle$ APR $\cong$ $\angle$ BQR

& (Δ APR ~ Δ BQR)

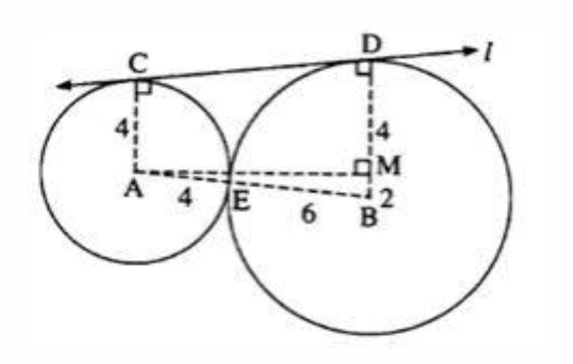
$\angle$ BQR = 110°

उत्तर : $\angle$ RQB चे माप 110° आहे.

प्र.9 आकृतीमध्ये, केंद्र A व B असणारी वर्तुळे परस्परांना बिंदू E मध्ये स्पर्श करतात. रेषा *l* ही त्यांची सामाईक स्पर्शिका त्यांना अनुक्रमे C व D मध्ये स्पर्श करते. जर वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 4 सेमी व 6 सेमी असतील, तर रेख CD ची लांबी किती असेल?



उत्तर :



रेख AC, रेख AB व रेख BD काढा

रेख AM ⊥ **रेख BD काढा.**

B-M-D. A व B केंद्रे असलेल्या वर्तुळाचे’ अनुक्रमे बिंदु C व D हे स्पर्शबिंदु आहेत.A केंद्र असलेल्या वर्तुळाची रेख AC ही त्रिज्या व B केंद्र असलेल्या वर्तुळाची रेख BD ही त्रिज्या.

< ACD = 90°

व < BDC = 90° ____ (स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय)

< AMD = 90° ____(रचना)

■ ACDM मध्ये,

< ACD + < MDC + < AMD + < CAM = 360°

___(चौकोनाच्या कोनांची बेरीज 360° असते.)

$\therefore 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + < CAM = 360^\circ$

$\therefore 270^\circ + < CAM = 360^\circ$

$< CAM = 360^\circ - 270^\circ$

$\therefore < CAM = 90^\circ$

■ ACDM चा प्रत्येक कोन काटकोन आहे.

■ ACDM आयत आहे.

∴ AC = MD व CD = AM ___(आयताच्या संमुख बाजू)_ (1)

BD = BM + MD ___(B - M - D)

6 = BM + 4 ____(AC = MD = 4)

∴ BM = 6 - 4 = 2

तसेच,

AB = AE + EB ____(A - E - B, स्पर्शवर्तुळाचे प्रमेय)

AB = 4 + 6

∴ AB = 10

$< AMB = 90^\circ$ ___(रचना)

Δ AMB या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$AB^2 = AM^2 + BM^2$

$\therefore 10^2 = AM^2 + 2^2$

$\therefore 100 = AM^2 + 4$

$\therefore AM^2 = 100 - 4 = 96$

$\therefore AM = \sqrt{96} = \sqrt{16 \times 6}$ ___(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\therefore$ AM = $4\sqrt{6}$ सेमी

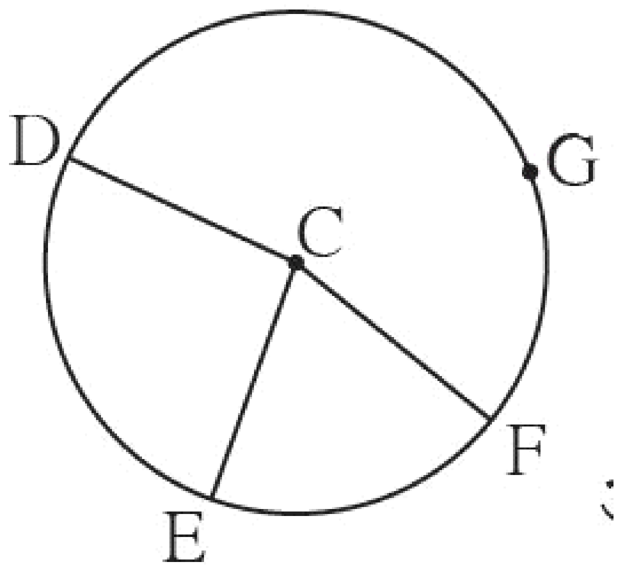
$\therefore$ AM = CD ___(1) वरून

$\therefore$ CD = $4\sqrt{6}$ सेमी

उत्तर : रेख CD ची लांबी $4\sqrt{6}$ सेमी आहे.

सरावसंच 3.3

प्र.1 आकृतीमध्ये, केंद्र C असलेल्या वर्तुळावर G, D, E आणि F हे बिंदू आहेत. $< ECF$ चे माप 70° आणि कंस DGF चे माप 200° असेल, तर कंस DE आणि कंस DEF यांची मापे ठरवा.



उत्तर : आकृतीत, C वर्तुळ केंद्र असून, G, D, E आणि F हे बिंदू वर्तुळावर आहेत. .....(दिले आहे)

< ECF = m(कंस EF) ..(कंसच्या मापाच्या व्याख्येवरून)

70° = m (कंस EF)

∴ m(कंस EF) = 70°

आता, m(कंस DFE) = m(कंस DGF) + m(कंस EF)

......(कंसच्या मापाच्या बेरजेचा गुणधर्म)

= 200° + 70° ...(किमती भरून)

= 270°

आता, m(कंस DFE) = 360° - m(कंस DE) .

.....(कंसच्या मापाची व्याख्या)

∴ 270° = 360° - m(कंस DE) ....(किमती भरून)

∴ m(कंस DE) = 360 - 270° = 90°

m(कंस DFE) = m(कंस DE) + m(कंस EF)

......(कंसच्या मापाच्या बेरजेचा गुणधर्म)

= 90° + 70°

= 160°

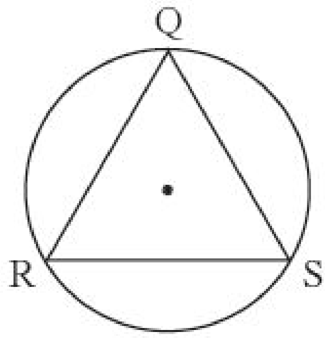
m(कंस DE) = 90°

m(कंस DFE) = 160° आहे.

प्र.2 आकृतीमध्ये Δ QRS समभुज आहे. तर दाखवा की -

(1) कंस RS ≅ कंस QS ≅ कंस QR

(2) कंस QRS चे माप 240° आहे.



उत्तर : सिद्धता : **(i)** Δ QRS या समभुज त्रिकोणात,

रेख QR ≅ रेख RS ≅ रेख Qs ____(समभुज त्रिकोणाच्या बाजू)

∴ एका वर्तुळाच्या एकरूप जीवांचे संगत कंस एकरूप असतात.

∴ कंस RS ≅ कंस QS ≅ कंस QR.

(ii) पहिली पद्धत :

< QRS = 60° ....(समभुज त्रिकोणाचा कोन)

< QRS = $\frac{1}{2}$ m(कंस QS) .....(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$\therefore 60° = \frac{1}{2}$ m(कंस QS)

$\therefore$ m(कंस QS) = $60° \times 2 = 120°$

आता, m(कंस QRS) = 360° – m(कंस QS)

____ (कंसांच्या मापांच्या व्याख्येवरून)

$\therefore$ m(कंस QRS)= 360° - 120°

$\therefore$ m(कंस QRS)= 240°

दुसरी पद्धत :

m(कंस RS) = m(कंस QS) = m(कंस QR) = x मानू.

पूर्ण वर्तुळकंसाचे माप 360° असते.

$\therefore$ m(कंस RS) + m(कंस QS) + m(कंस QR) = 360°.

$\therefore x + x + x = 360°$

$\therefore 3x = 360°$

$\therefore x = 120°$

m(कंस QRS) = m(कंस QR) + m(कंस RS)

$= x + x$

$= 2x$

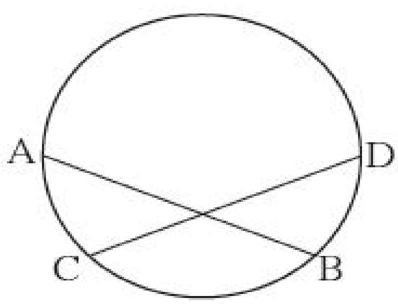
$= 2 \times 120^\circ$

$= 240^\circ$

प्र.3 आकृतीमध्ये, जीवा AB ≅ जीवा CD,

तर सिद्ध करा -

कंस AC ≅ कंस BD



उत्तर : जीवा AB जीवा CD.

एकाच वर्तुळाच्या एकरूप जीवांचे संगत कंस एकरूप असतात.

कंस AB ≅ कंस CD

m(कंस AB) = m(कंस CD) ____(1)

m(कंस AC) + m(कंस CB) = m(कंस AB)

व m(कंस CB) + m(कंस BD) = m(कंस CD)

____(कंसांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म)____ (2)

m(कंस AC) + m(कंस CB) = m(कंस CB) + m(कंस BD)

____ [(1) व (2) वरून]

m(कंस AC) = m(कंस BD)

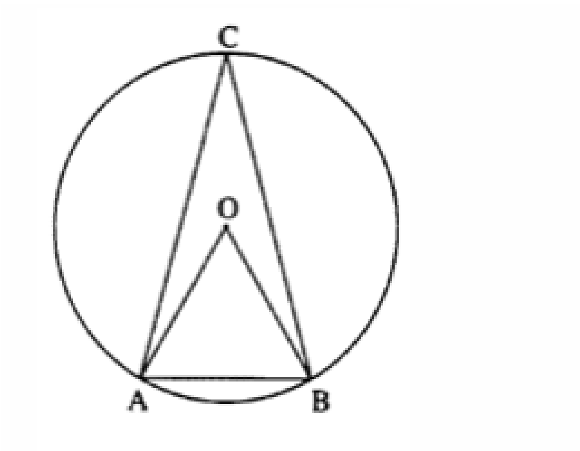
कंस AC ≅ कंस BD.

सरावसंच 3.4

प्र.1 आकृतीमध्ये, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB ची लांबी वर्तुळाच्या त्रिज्येएवढी आहे.

तर (1) < AOB (2) < ACB

(3) कंस AB आणि (4) कंस ACB यांची मापे काढा.



उत्तर : O केंद्र असलेल्या वर्तुळात,

$OA = OB$ ______(एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

व $OA = OB = AB$ ____(दिले आहे)

$\therefore \Delta$ OAB हा समभुज त्रिकोण आहे.

$\therefore < AOB = 60^\circ$ .....(समभुज त्रिकोणाचा कोन)_(1)

$< AOB =$ m(कंस AB) ....(कंसाच्या मापाच्या व्याख्येवरून)

$\therefore$ m(कंस AB) = 60° ...(1)वरून___(2)

< ACB = $\frac{1}{2}$ m(कंस AB) ___(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

= $\frac{1}{2} \times 60°$ = 30°

m(कंस ACB) = 360° - m(कंस AB) ____(कंसाच्या मापाची व्याख्या)

-1 वरुन

= 360° - 60°

= 300°

उत्तरे :- i) < AOB = 60° ii) < ACB = 30°

iii) m(कंस AB) = 60° iv) m(कंस ACB) = 300°

प्र.2 आकृतीमध्ये, □ PQRS हा चक्रीय आहे. बाजू PQ बाजू RQ.

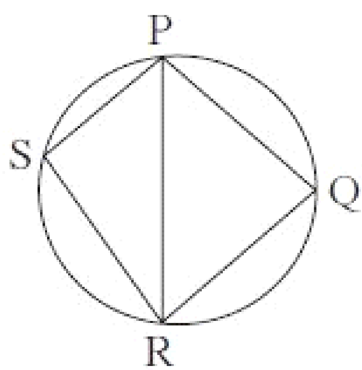
< PSR = 110°, तर

(1) < PQR = किती?

(2) *m*(कंस PQR) = किती?

(3) *m*(कंस QR) = किती?

(4) $<$ PRQ = किती?



उत्तर : i) □ PQRS हा चक्रीय चौकोन आहे.

$< PSR + < PQR = 180°$ ___(चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन)

$\therefore 110° + < PQR = 180°$ ___(किमती भरून)

$\therefore < PQR = 180° - 110°$

$= 70°$

(ii) $< PSR = \frac{1}{2}$ m(कंस PQR) ____(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$\therefore 110° = \frac{1}{2}$ m(कंस PQR)

$\therefore$ m(कंस PQR) = 220°

(iii) बाजू PQ $\cong$ बाजू RQ ___(दिले आहे)

एकाच वर्तुळात एकरूप जीवांचे संगत कंस एकरूप असतात.

कंस PQ $\cong$ कंस RQ

m(कंस PQ) = m(कंस RQ)

m(कंस PQ) = $\frac{\text{m(कंस PQR)}}{2}$

$= \frac{220°}{2}$

= 110°

$\therefore$ m(कंस PQ) = 110°

(iv) < PRQ = $\frac{1}{2}$ m(कंस PQ) ____(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$= \frac{1}{2} \times 110°$

= 55°

उत्तरे :

(i) PQR = 70°

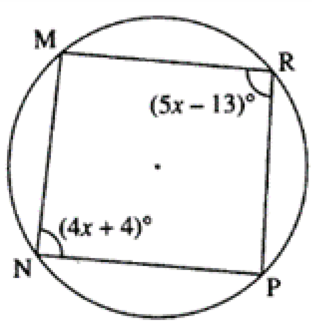
(ii) m(कंस PQR) = 220°;

(iii) m(कंस QR) = 110° व

(iv) < PQR = 55° आहेत.

3. चक्रीय ■ MRPN मध्ये , < R = (5x-13)° आणि < N = (4x + 4)° , तर < R आणि < N यांची मापे ठरवा.

रीत : ■ MRPN हा चक्रीय चौकोन आहे.



< R + < N = 180° ____(चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन)

∴ 5x - 13 + 4x + 4 = 180 ____(किमती भरून)

9x + 9 = 180

∴ x - 1 = 20 ____(9 ने दोन्ही बाजूंस भागून)

∴ x = 20 + 1 = 21

$< R = 5 \times 21 - 13$

$= 105 - 13$

$\therefore < R = 92^\circ$

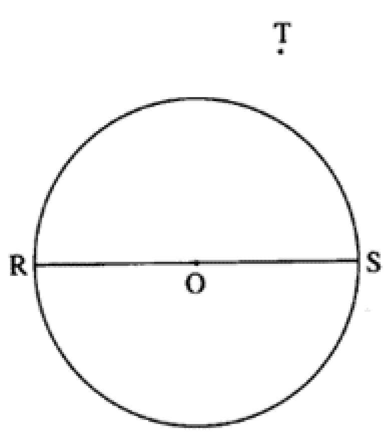
व $< N = 4 \times 21 + 4$

$= 84 + 4$

$\therefore < N = 88^\circ$

उत्तर : $< R = 92^\circ$ आणि $< N = 88^\circ$ आहेत.

4. आकृतीमध्ये, रेख RS हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. बिंदू T हा वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदू आहे. तर दाखवा की, $< RTS$ हा लघुकोन आहे.

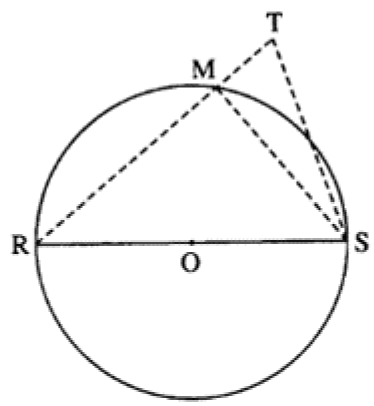


रचना : M हा बिंदू वर्तुळावर असा घ्या की, R-M-T.

रेख RT, रेख TS व रेख MS काढा.

सिद्धता : रेख RS हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास R" आहे. _(दिले आहे)

व M हा वर्तुळावरील बिंदू आहे. ____(रचना)



कंस RMS हे अर्धवर्तुळ आहे.

$< RMS = 90^\circ$ ___ (अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित कोन काटकोन असतो.)___ (1)

< RMS हा Δ MTS चा बाह्यकोन.

$< RMS > < T$ ____ (त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचा गुणधर्म)____ (2)

(1) व (2) वरून,

$< T < 90^\circ$

∴ < T हा लघुकोन आहे.

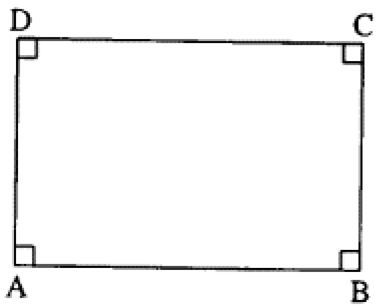
म्हणजेच, < RTS हा लघुकोन आहे.

5. कोणताही आयत हा चक्रीय चौकोन असतो, हे सिद्ध करा.

पक्ष : ■ ABCD हा आयत आहे.

साध्य : ■ ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे.

सिद्धता : ■ ABCD हा आयत आहे.   ___(पक्ष)



आयताचा प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

$\therefore \angle A + \angle C = 90^\circ + 90^\circ$

$= 180^\circ$

त्याचप्रमाणे, $\angle B + \angle D = 180^\circ$

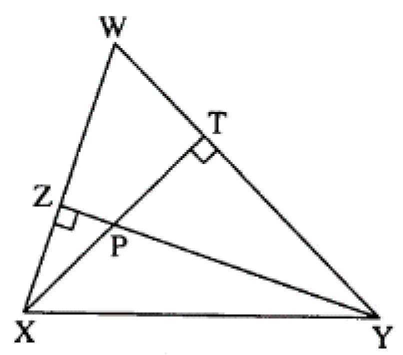
■ ABCD च्या संमुख कोनांच्या जोड्या पूरक आहेत.

■ ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे.   ___(चक्रीय चौकोनाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास)

6. आकृतीमध्ये, रेख YZ आणि रेख XT हे Δ WXY चे शिरोलंब बिंदू P मध्ये छेदतात; तर सिद्ध करा –

(i) ■ WZPT हा चक्रीय आहे.

(ii) बिंदू x, Z, T, Y हे एकाच वर्तुळावर आहेत.



सिद्धता : रेख YZ आणि रेख XT हे Δ WXY चे शिरोलंब आहेत.

∴ < WZP = 90° व < WTP = 90°

∴ < WZP + < WTP = 90° + 90° = 180° ____(1)

■ WZPT मध्ये,

< W + < ZPT + < WZP + < WTP = 360°

___(चौकोनाच्या चार कोनांची बेरीज 360° असते.)

∴ < W + < ZPT + 180° = 360° ___(1) वरून

∴ < W + < ZPT = 360° - 180°

∴ < W + <   ZPT = 180° ____(2)

(1) व (2) वरून,

■ WZPT चे संमुख कोन परस्परांचे पूरक आहेत.

■ WZPT हा चक्रीय आहे.   ____(चक्रीय चौकोनाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास)

(ii) रेख XY च्या एकाच बाजूस < XZY व < XTY आहेत.

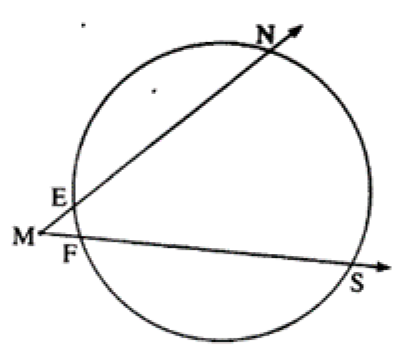
तसेच,

$< XZY + < XTY = 90° + 90° = 180°$

रेषेचे दोन भिन्न बिंदू हे त्या रेषेच्या एकाच बाजूला असणाऱ्या दोन भिन्न बिंदूंशी एकरूप कोन निश्चित करीत असतील, तर ते चार बिंदू एकाच वर्तुळावर असतात.

बिंदू X, Z, T, Y हे एकाच वर्तुळावर आहेत.

7. आकृतीमध्ये, m(कंस NS) = 125°, m (कंस EF) = 37°, तर < NMS चे माप काढा.



रीत : वर्तुळाच्या जीवांना सामावणाऱ्या रेषा वर्तुळाच्या बाह्यभागात छेदत असतील, तर त्या रेषांमधील कोनाचे माप, त्या कोनाने अंतखंडित केलेल्या कंसांच्या मापांच्या फरकाच्या निम्मे असते.

आकृतीत,

< NMS ने कंस NS व कंस EF अंतखंडित केले आहेत.

< NMS $= \frac{1}{2}$ [m(कंस NS) - m(कंस EF)]

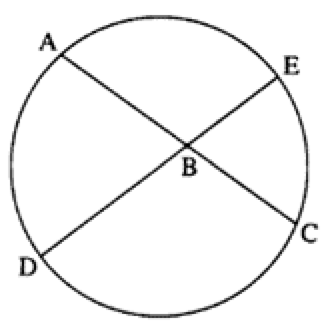
$= \frac{1}{2}\ [125° - 37°]$

$= \frac{1}{2}\ [88°]$

उत्तर : < NMS = 44° आहे.

8. आकृतीमध्ये, जीवा AC आणि जीवा DE बिंदू B मध्ये छेदतात.

जर < ABE = 108° आणि m (कंस AE) = 95, तर m(कंस DC) काढा.



रीत : जीवा AC व जीवा DE परस्परांना वर्तुळाच्या अंतर्भागात B या बिंदूत छेदतात. वर्तुळाच्या जीवा एकमेकींना छेदत असतील, तर त्या जीवांमधील कोनाचे माप, त्या कोनाने अंतखंडित केलेला कंस आणि त्याच्या विरुद्ध कोनाने अंतखंडित केलेला कंस, यांच्या मापांच्या बेरजेच्या निम्मे असते.

$< ABE = \frac{1}{2}$ [m(कंस AE) + m(कंस DC)]

$108^\circ = \frac{1}{2} +$ m(कंस DC)]

$\therefore 108 \times 2 = 95 +$ m(कंस DC)

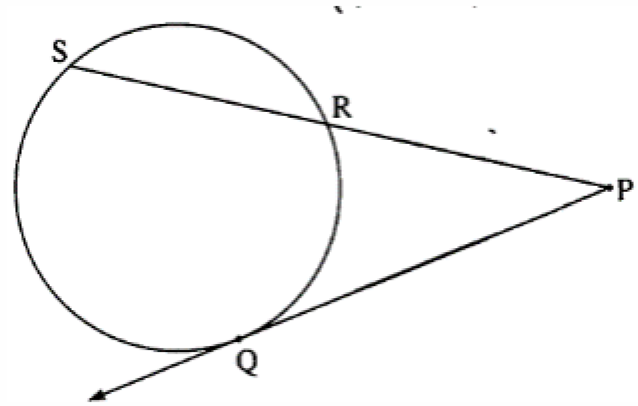
$\therefore 216 - 95 =$ m(कंस DC)

$\therefore$ m(कंस DC) $= 121^\circ$

उत्तर : m(कंस DC) = 121° आहे.

सरावसंच 3.5

1. आकृतीमध्ये, बिंदू Q हा स्पर्शबिंदू आहे. जर PQ = 12, PR = 8, तर PS = किती ? RS = किती ?



रीत :

आकृतीवरून,

रेख PQ ही स्पर्शिका व रेख PS ही वृत्तछेदिका आहे.

PQ^2 = PR × PS ___(स्पर्शिका - छेदिका रेषाखंडाचे प्रमेय)

12^2 = 8 × PS ____(किमती भरून)

$\therefore \frac{12\times12}{8} = PS$

$\therefore PS = 18$

$PS = PR + RS$ ___(P-R-S)

$\therefore 18 = 8 + RS$

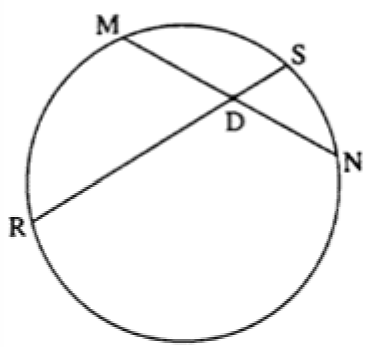
$\therefore RS = 18 - 8 = 10$

उत्तर : PS = 18 व RS = 10 आहे.

2. आकृतीमध्ये, जीवा MN आणि Rs या एकमेकींना बिंदू D मध्ये छेदतात.

(i) जर RD = 15, - DS = 4, MD = 8; तर DN = किती?

(ii) जर RS = 18, MD = 9, DN = 8; तर DS = किती?



रीत :

(i) जीवा RS व जीवा MN या वर्तुळाच्या अंतर्भागात D या बिंदूत छेदतात.

RD × DS = MD× DN ___(जीवांच्या अंतछंदनाचे प्रमेय)

15 × 4 = 8 × DN ___(किमती भरून)

$\therefore \frac{15 \times 4}{8} = DN$

$\therefore DN = 7.5$

(ii)

RS = 18, RD = x

RS = RD + DS ____(R-D-S)

जीवाच्या अंतछेदनाच्या प्रमेयानुसार,

RD × DS = MD × DN

x × (18 - x) = 9 × 8

∴ $18x - x^2 = 72$

$-x^2 + 18x - 72 = 0$

$x^2 - 18x + 72 = 0$ ___ (दोन्ही बाजूंना (- 1) ने गुणून)

$(x - 12)(x - 6) = 0$

$x - 12 = 0$ किंवा $x - 6 = 0$

∴ $x = 12$ किंवा $x = 6$

आकृतीवरून, RD > DS

∴ $x = 6$ ही किंमत अग्राह्य,

∴ $x = 12$ ही किंमत ग्राह्य मानू.

∴ RD = 12 व DS = 18 - 12 = 6

जर, RD < DS

तर $x = 12$ ही किंमत अग्राह्य,

∴ $x = 6$ ही किंमत ग्राह्य मानू.

∴ RD = 6 व DS = 18 - 6 = 12

उत्तर : (i) DN = 7.5 व (ii) DS = 6 किंवा 12 आहे.

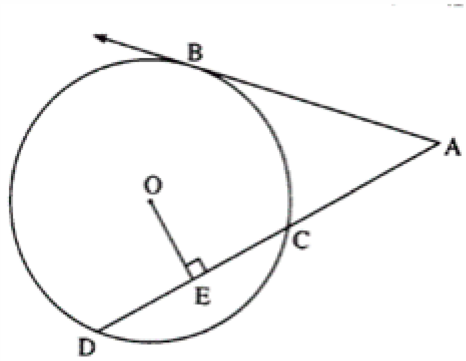
3. आकृतीमध्ये, बिंदू B हा स्पर्शबिंदू आणि बिंदू O हे वर्तुळकेंद्र आहे.

रेख OE ⊥ रेषा AD, AB = 12, AC = 8; तर

(i) AD

(ii) DC आणि

(iii) DE काढा.



रीत :

(i) O हे केंद्र असलेल्या वर्तुळात रेख AB ही स्पर्शिका व रेख AD ही छेदिका.

$AB^2 = AC \times AD$ ___(स्पर्शिका - छेदिका रेषाखंडाचे प्रमेय)

$12^2 = 8 \times AD$ ___(किमती भरून)

$\therefore \frac{12 \times 12}{8} = AD$

$\therefore AD = 18$

(ii) आता,

$AD = AC + CD$ ____(A - C - D)

$18 = 8 + CD$

$\therefore CD = 18 - 8 = 10$

रेख OE ⊥ जीवा CD ____(दिले आहे)

(iii) केंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवा दुभागतो.

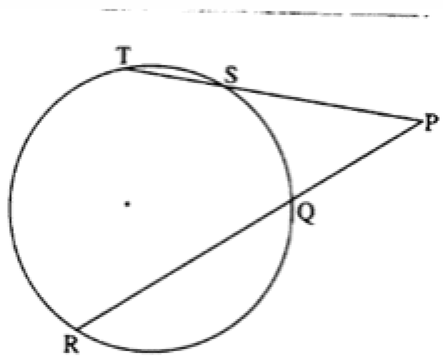
$DE = \frac{1}{2} CD$

$= \frac{1}{2} \times 10$

$\therefore DE = 5$

उत्तर : (i) AD = 18; (ii) DC = 10 व (iii) DE = 5 आहेत.

4. आकृतीमध्ये, जर PQ = 6, QR = 10, PS = 8; तर TS = किती?



रीत : PR = PQ + QR____(P-Q-R)

PR = 6 + 10 = 16

जीवांच्या बाह्यछेदनाच्या प्रमेयावरून,

$PQ \times PR = PS \times PT$ ___(किमती भरून)

$6 \times 16 = 8 \times PT$

$\therefore \frac{6\times16}{8} = PT$

$\therefore PT = 12$

$PT = PS + ST$

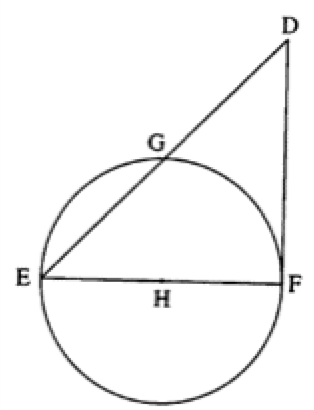
$\therefore 12 = 8 + ST$

$\therefore ST = 12 - 8 = 4$

उत्तर : TS = 4 आहे.

5. आकृतीमध्ये, रेख EF हा व्यास आणि रेख DF हा स्पर्शिकाखंड आहे. वर्तुळाची त्रिज्या r आहे.

तर सिद्ध करा : $DE \times GE = 4r^2$



रीत : आकृतीत, रेख EF व्यास आहे.

EF = 2r

रेख DF हा स्पर्शिकाखंड व F हा स्पर्शबिंदू आहे.

< HFD = 90∘ ____(स्पर्शिका - त्रिज्या प्रमेय)

म्हणजेच , < EFD = 90∘

$\triangle EFD$ या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$DE^2 = DF^2 + EF^2$ ___(1)

तसेच,

$DF^2 = DG \times$ DE ___(स्पर्शिका - छेदिका रेषाखंडाचे प्रमेय) ___(2)

(2) ची किंमत (1) मध्ये भरून,

$DF^2 = DG \times DE + (2r)^2$ ____(EF=2r)

$\therefore DE^2 - DG \times DE = 4r^2$

$\therefore DE(DE - DG) = 4r^2$

$\therefore DE(DE - DG) = 4r^2$

$\therefore DE \times GE = 4r^2$ ____(D - G - E)

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. पुढील प्रत्येक उपप्रश्नासाठी चार पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडा :

(1) त्रिज्या अनुक्रमे 5.5 सेमी आणि 3.3 सेमी असलेली दोन वर्तुळे परस्परांना स्पर्श करतात. त्यांच्या केंद्रांतील अंतर किती सेमी आहे ?

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 8.8 किंवा 2.2

उत्तर :- (D) 8.8 किंवा 2.2

(2) परस्परांना छेदणाऱ्या दोन वर्तुळांपैकी प्रत्येक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळाच्या केंद्रातून जाते. जर त्यांच्या केंद्रांतील अंतर 12 सेमी असेल, तर प्रत्येक वर्तुळाची त्रिज्या किती सेमी आहे ?

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) सांगता येणार नाही

उत्तर :- (B) 12

(3) 'एक वर्तुळ एका समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व बाजूंना स्पर्श करते, तर तो समांतरभुज चौकोन ____असला पाहिजे,' या विधानातील रिकाम्या जागी योग्य शब्द लिहा.

(A) आयत (B) समभुज चौकोन (C) चौरस (D) समलंब चौकोन

उत्तर :- (B) समभुज चौकोन

(4) एका वर्तुळाच्या केंद्रापासून 12.5 सेमी अंतरावरील एका बिंदूतून त्या वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शिकाखंडाची लांबी 12 सेमी आहे, तर त्या वर्तुळाचा व्यास किती सेमी आहे ?

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

उत्तर :- (C) 7

(5) एकमेकांना बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांना जास्तीत जास्त किती सामाईक स्पर्शिका काढता येतील ?

(A) एक (B) दोन (C) तीन (D) चार

उत्तर :- (C) तीन

(6) केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या कंस ACB मध्ये, < ACB हा अंतर्लिखित केला आहे. जर < ACB = 65° तर m(कंस ACB) = किती?

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

उत्तर :- (D) 230°

(7) एका वर्तुळाच्या जीवा AB आणि CD या परस्परांना वर्तुळाच्या अंतर्भागात बिंदू E मध्ये छेदतात. जर AE = 5.6, EB = 10, CE = 8; तर ED = किती?

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

उत्तर :- (A) 7

(8) चक्रीय ■ ABCD मध्ये, < A च्या मापाची दुप्पट ही < C च्या मापाच्या तिपटीएवढी आहे; तर < C चे माप किती ?

(A) 36° (B) 72° (C) 90° (D) 108°

उत्तर :- (B) 72°

(9) एकाच वर्तुळावर बिंदू A, B, C असे आहेत, की m(कंस AB) = m(कंस BC) = 120°. दोन्ही कंसांत B शिवाय एकही बिंदू सामाईक नाही; तर

△ ABC हा कोणत्या प्रकारचा आहे?

(A) समभुज त्रिकोण

(B) विषमभुज त्रिकोण

(C) काटकोन त्रिकोण

(D) समद्विभुज त्रिकोण

उत्तर :- (A) समभुज त्रिकोण

(10) रेख XZ व्यास असलेल्या वर्तुळाच्या अंतर्भागात Y हा एक बिंदू आहे; तर पुढीलपैकी किती विधाने सत्य आहेत ?

(i) $< XYZ$ हा लघुकोन असणे शक्य नाही.

(ii) $< XYZ$ हा काटकोन असणे शक्य नाही.

(iii) $< XYZ$ हा विशालकोन आहे.

(iv) $< XYZ$ च्या मापासंबंधी निश्चित विधान करता येणार नाही.

(A) फक्त एक

(B) फक्त दोन

(C) फक्त तीन

(D) सर्व

उत्तर :- (C) फक्त तीन

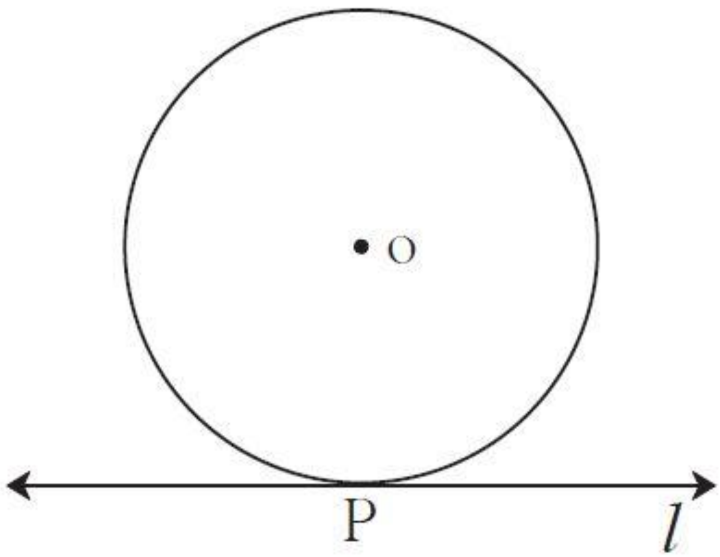
2. बिंदू O केंद्र असलेल्या वर्तुळाला रेषा l बिंदू P मध्ये स्पर्श करते. जर वर्तुळाची त्रिज्या 9 सेमी असेल, तर

खालील प्रश्नां ची उत्तरे लिहा.

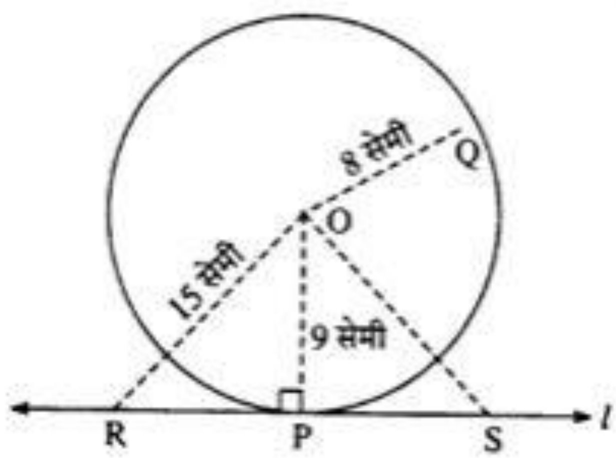
(1) d(O, P) = किती? का?

(2) जर d(O, Q) = 8 सेमी असेल. तर बिंदू Q चे स्थान कोठे असेल?

(3) d(O,R)=15 सेमी असेल तर बिंदू R ची किती स्था ने रेषा l वर असतील? ते बिंदू P किती अंतरावर असतील?



उत्तर :-



i) $< OPR = 90°$ ____(स्पर्शिका त्रिज्या प्रमेय)

$\therefore$ रेख OP $\perp$ रेषा L. $d(O, P) = r$

रेख OP ही त्रिज्या आहे.

$d(O, P) = 9$ सेमी ____ ($\because r = 9$ सेमी)

ii) $d(O, Q) = 8$ सेमी व $r = 9$ सेमी

$\therefore d(O, Q) < r$

$\therefore$ बिंदु Q हा वर्तुळाच्या अंतर्भागात असेल

iii) $d(O, R) = 15$ सेमी

असे दोन बिंदू रेषा L वर असतील.

(आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एक बिंदू हा बिंदू P च्या डावीकडे व दुसरा बिंदू हाबिंदू P च्या उजवीकडे असेल.)

$< OPR = 90°$

$\triangle OPR$ या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरुन,

$OR^2 = OP^2 + PR^2$

$\therefore 15^2 = 9^2 + PR^2$

$\therefore 225 = 81 + PR^2$

$\therefore \ PR^2 = 225 - 81 = \ 144$

$\therefore \ PR = 12$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

त्याचप्रमाणे, PS= 12

ते बिंदू P पासून प्रत्येकी 12 सेमी अंतरावर असतील.

(1) d(O, P) = 9 सेमी

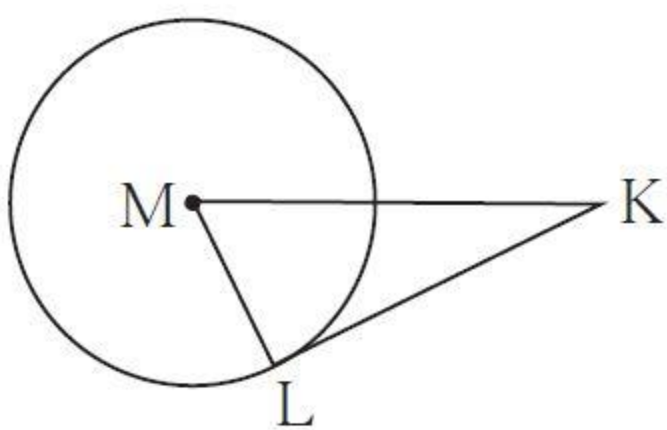
(2) बिंदु Q हा वर्तुळाच्या अंतर्भागात असेल

(3) दोन बिंदू ; P पासून प्रत्येकी 12 सेमी अंतरावर असतील.

3. सोबतच्या आकृतीत, बिंदू M वर्तुळकेंद्र आणि रेख KL हा स्पर्शिकाखंड आहे.
जर MK = 12, KL = $6\sqrt{3}$ तर

(1) वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

(2) < K आणि < M यांची मापे ठरवा.



उत्तर :- वर्तुळात बिंदू M हे वर्तुळकेंद्र आणि रेख KL हा स्पर्शिकाखंड ____(दिले आहे)

$\angle MLK = 90°$ ____(स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय)____(1)

$\triangle MLK$ या काटकोन त्रिकोणात,

$MK^2 = ML^2 + KL^2$ ____(पायथागोरसच्या प्रमेयावरुन)

$\therefore 12^2 = ML^2 + (6\sqrt{3})^2$ ____ (दिलेल्या किमती भरून)

$\therefore 144 = ML^2 + 108$

$\therefore ML^2 = 144 - 108$

$\therefore ML^2 = 36$

$\therefore ML = 6$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\therefore r = 6$ ____ (ML= r)

ML= 6

(2) $\therefore ML = \frac{1}{2} MK$

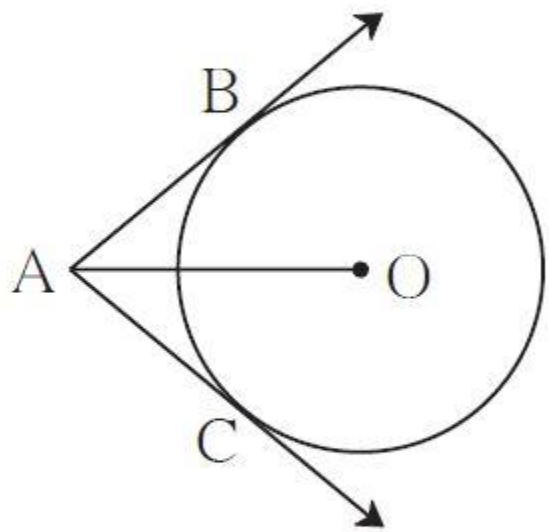
$\therefore \angle K = 30°$ ____ (30°-60°-90° त्रिकोणाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास)

$\therefore \angle L = 90°$ ____ (1) वरुन

$\therefore \angle M = 60°$ _____(उरलेला कोन)

1) $r = 6$ 2) $< K = 30°$ आणि $< M = 60°$

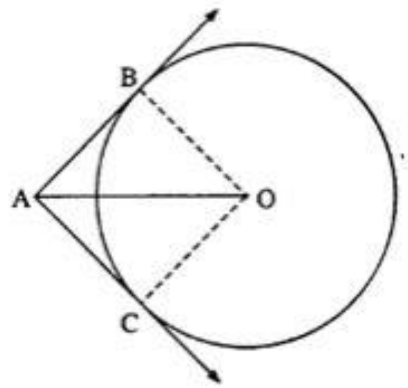
4. आकृतीमध्ये, बिंदू O वर्तुळकेंद्र आणि रेख AB व रेख AC हे स्पर्शि काखंड आहेत. जर वर्तुळाची त्रिज्या r असेल आणि l(AB) = r असेल, तर □ ABOC हा चौरस होतो, हे दाखवा.



उत्तर :- रचना : रेख OB व रेख OC काढा.

सिद्धता : l (AB) =r ____(दिले आहे)____ (1)

AB = AC ____(स्पर्शिकाखंडाचे प्रमेय)____(2)



∴ AC = r ____[(2) वरून]___(3)

O वर्तुळकेंद्र. रेख OB व रेख OC या त्रिज्या आहेत.

∴ l(OB) = l(OC) = r ____(4)

(1), (3) व (4) वरून,

l(AB) = l(AC) = l(OP) = l(OC) = r ____ (5)

$< OBA = 90°$

व $< OCA = 90°$ ___(स्पर्शिका - त्रिज्या प्रमेय)___ (6)

△ ABO मध्ये,

AB=OB ____(प्रत्येकी r, लांबी)

∴ < BOA = < BOA ___(समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

∴ < BAO = < BOA = 45° ..... < OBA = 90° ___ (7)

त्याचप्रमाणे, △ ACO मध्ये,

< CAO = < COA = 45° ____ (8)

∴ BAC = < BAO + < CAO = 45° + 45° = 90° ___(7) व (8) वरून ___(9)

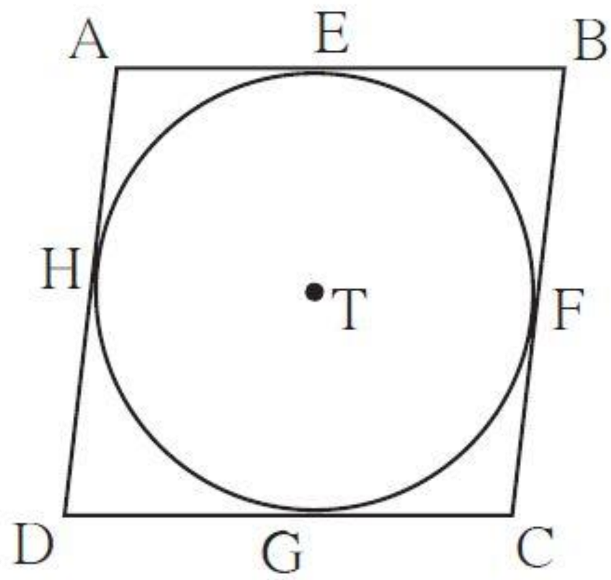
व < BOC = < BOA + < COA = 45° + 45° = 90° ____(7) व (8) वरून ___ (10)

(5), (6), (9) व (10) वरून,

■ ABOC च्या सर्व बाजू एकरूप असून प्रत्येक कोन काटकोन आहे.

■ ABOC हा चौरस आहे.

5. आकृतीमध्ये, समांतरभुज □ ABCD हा केंद्र T असलेल्या वर्तुळाभोवती परिलिखित केला आहे. (म्हणजे त्या चौकोनाच्या बाजू वर्तुळाला स्पर्श करतात.) बिंदू E, F, G आणि H हे स्पर्श बिंदू आहेत. जर AE = 4.5 आणि EB = 5.5, तर AD काढा.



उत्तर :- रीत : समांतरभुज ■ ABCD हा केंद्र T असलेल्या वर्तुळाभोवती परिलिखित केला आहे.

स्पर्शिकाखंडाच्या प्रमेयानुसार,

AE = AH ___(1)

BE = BF ___(2)

DG = DH ___(3)

CG = CF ___(4)

(AE + BE) + (DG + CG) = (AH + DH) + (BF + CF) ____[(1), (2), (3) व (4) यांची बेरीज करून]

∴ AB + DC = AD + BC____(A-E-B, D-G-C, A-H-D, B-F-C)___(5)

समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजांची लांबी समान असते.

∴ AB = DC

व AD = BC ____(6)

∴ AB + AB = AD + AD ____(5) व (6) वरून

∴ AB = 2AD

∴ AB = AD ___(दोन्ही बाजूंना 2 ने भागून)___(7)

AB = AE + EB ___(A - E - B)

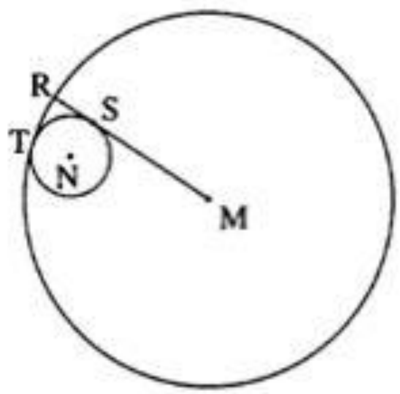
= 4.5 + 5.5 ____(दिलेल्या किमती भरून)

AB = 10

AB ची किंमत (7) मध्ये ठेउन.

AD = 10.

6. आकृतीमध्ये, केंद्र N असलेले वर्तुळ, केंद्र M असणाऱ्या वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करते. मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या लहान वर्तुळाला बिंदू S मध्ये स्पर्श करते. जर मोठ्या व लहान वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 9 सेमी व 2.5 सेमी असतील, तर पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधा व त्यावरून MS : SR हे गुणोत्तर काढा.

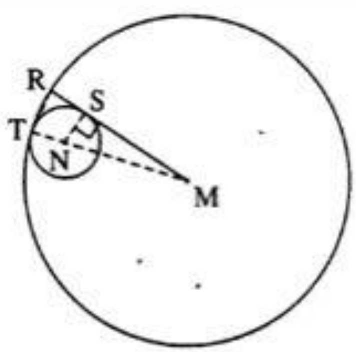


(i) MT = किती ?

(ii) MN = किती?

(iii) < NSM = किती?

उत्तर :-



रीत : रेख NS, रेख MN व रेख NT काढा.

स्पर्शवर्तुळांच्या प्रमेयानुसार,

M - N -T

MT = MN + NT

9 = MN+ 2.5

∴ MN = 9-2.5 = 6.5 ____(1)

$\angle MSN = 90^\circ$ ____(स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय)

$\triangle MSN$ मध्ये,

पायथागोरस प्रमेयानुसार,

$MN^2 = MS^2 + NS^2$

$\therefore\ 6.5^2 = MS^2 + 2.5^2$

$\therefore\ 6.5^2 - 2.5^2 = MS^2$

$\therefore (6.5 + 2.5)(6.5 - 2.5) = MS^2$

$\therefore (9)(4) = \mathrm{MS}^2$

$\mathrm{MS}^2 = 36$

$\therefore MS = 6$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

MR = MS + SR ___ (M-S-R)

$\therefore 9 = 6 + SR$

$\therefore \mathrm{SR} = 3$

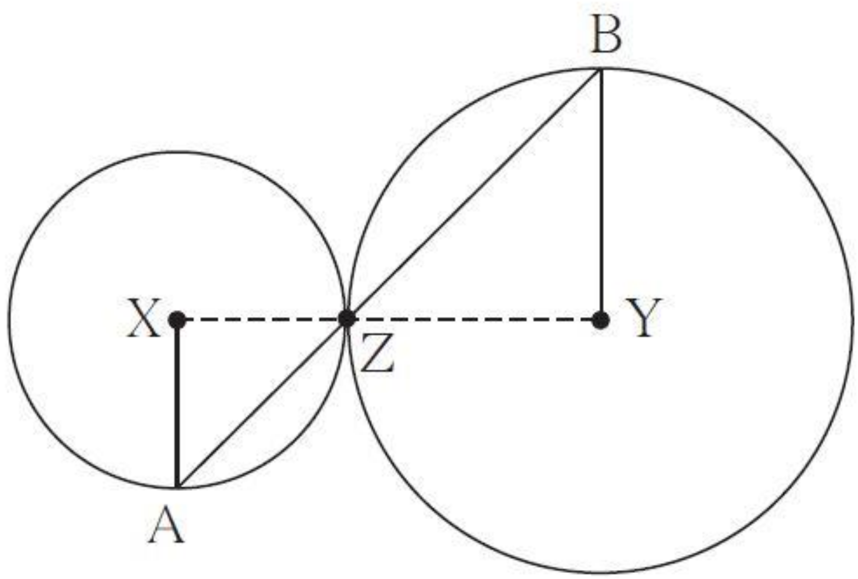
$\therefore\ \frac{MS}{SR} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$

i) MT= 9 __(*मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या*)

ii) MN = 6.5 ___(1) *वरुन*

iv) $\angle NSM = 90^\circ$

7. आकृतीत, केंद्र X आणि Y असलेली वर्तुळे परस्परांना बिंदू Z मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू z मधून जाणारी वृत्तछेदिका त्या वर्तुळांना अनुक्रमे बिंदू A व बिंदू B मध्ये छेदते. तर सिद्ध करा, त्रिज्या XA || त्रिज्या YB. पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून पूर्ण सिद्धता लिहून काढा :



रचना : रेख Xz आणि [__☐_] काढले.

सिद्धता : स्पर्शवर्तुळांच्या प्रमेयानुसार, बिंदू x, Z, Y हे ☐ आहेत.

< XZA ≅ ☐ ____(विरुद्ध कोन)

< XZA = < BZY = a मानू ____ (1)

आता, रेख XA ≅ रेख XZ ___(☐)

∴ < XAZ = < ☐ = a ____(समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)___ (2)

तसेच रेख YB ≅ [ ] ([ ])

∴ BZY = [ ] = a ___([ ])___(3)

(1), (2) व (3) वरून,

< XAZ = [ ]

∴ त्रिज्या XA || त्रिज्या YB ____([ ])

उत्तर :- रचना : रेख XZ आणि [__[रेख *YZ*]_] काढले.

सिद्धता : स्पर्शवर्तुळांच्या प्रमेयानुसार,

बिंदू x, Z, Y हे [एकरेषीय] आहेत.

< XZA ≅ [< *YZB*] ____(विरुद्ध कोन)

< XZA = < BZY = a मानू ____ (1)

आता, रेख XA ≅ रेख XZ ___([एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या])

∴ < XAZ = < [< *XZA*] = a ____(समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)___ (2)

तसेच रेख YB ≅ [रेख *YZ*] ____([एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या])

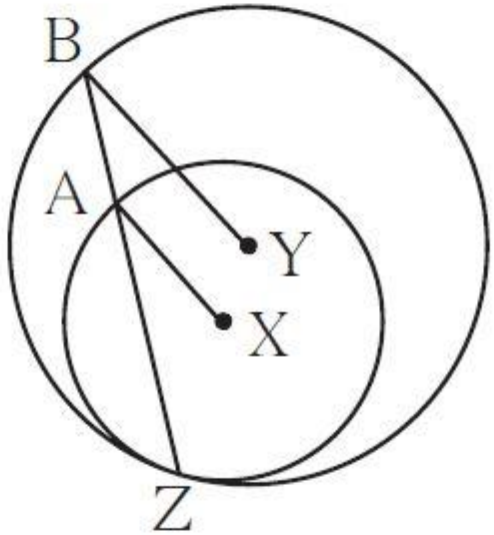
∴ < BZY = [< YBZ] = a ___([समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय])_(3)

(1), (2) व (3) वरून,

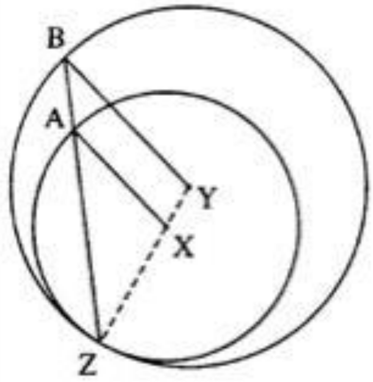
< XAZ = < YBZ

∴ त्रिज्या XA || त्रिज्या YB ___(व्युत्क्रम कोन कसोटीनुसार)

8. आकृतीमध्ये, केंद्र X व Y असणारी अंतस्पर्शी वर्तुळे बिंदू Z मध्ये स्पर्श करतात. रेख BZ ही मोठ्या वर्तुळाची जीवा लहान वर्तुळाला बिंदू A मध्ये छेदते. तर सिद्ध करा - रेख AX || रेख BY.



उत्तर :-



रचना : रेख YZ काढा.

सिद्धता : स्पर्शवर्तुळांच्या प्रमेयनुसार,

Y-X-Z

Δ XAZ मध्ये,

रेख AX $\cong$ रेख XZ ____ (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

$\therefore$ $<$ XAZ $\cong$ $<$ XZA ____(समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)____ (1)

तसेच, Δ YBZ मध्ये,

रेख YB $\cong$ रेख YZ ____ (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

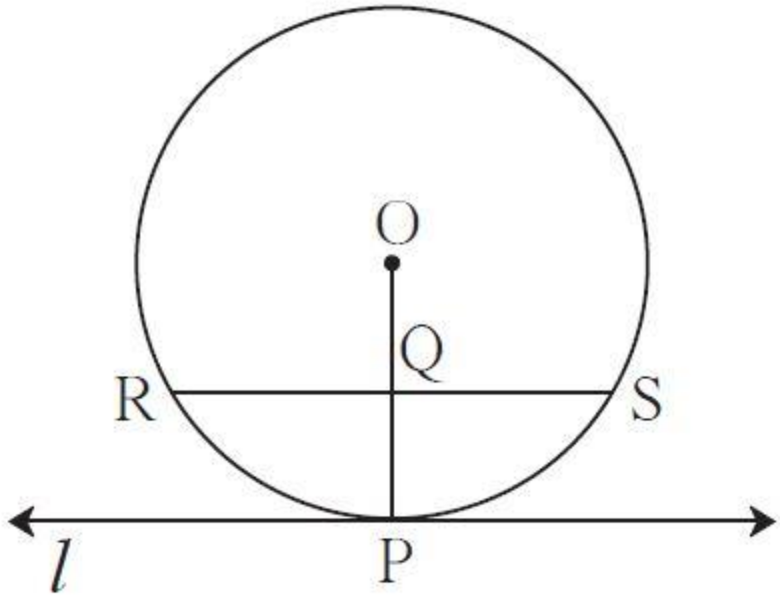
$\therefore$ $<$ YBZ $\cong$ $<$ YZB _____(समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)____ (2)

पण, $<$ YZB = $<$ XZA _____(तेच कोन परंतु अंत्यबिंदू भिन्न)____ (3)

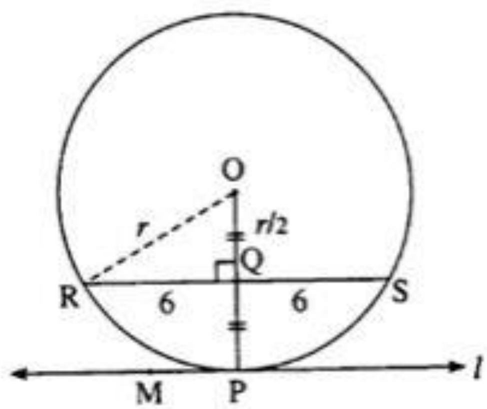
(1), (2) व (3) वरून, $<$ XAZ $\cong$ $<$ YBZ

रेख AX || रेख BY ____ (संगत कोन कसोटीनुसार)

9. शेजारील आकृतीत, रेषा *l* ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळाला बिंदू P मध्ये स्पर्श करते. बिंदू Q हा त्रिज्या OP चा मध्यबिंदू आहे. बिंदू Q ला सामावणारी जीवा RS || रेषा *l*. जर RS 12 सेमी असेल, तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.



उत्तर :-



रीत : रेख OR काढा. रेषा l व बिंदू M घ्या.

रेख OR वर्तुळाची त्रिज्या आहे.

∴ OR =r ____(1)

OP ही सुद्धा वर्तुळाची त्रिज्या आहे.

बिंदू Q हा रेख OP चा मध्यबिंदू आहे. ____ (दिले आहे)

$\therefore OQ = \frac{r}{2}$ ____(2)

त्रिज्या OP ⊥ रेषा l ____(दिले आहे)

∴ < OPM = 90° ____(स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय)____ (3)

जीवा RS || रेषा l ____ (दिले आहे)

∴ < OPM ≅ < OQR ____(संगत कोन कसोटी व्यत्यास)

∴ < OQR = 90° ____ (3) वरून

रेख OQ⊥जीवा RS.

केंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवा दुभागतो.

QR = QS = 6 सेमी ____(4)

Δ OQR या काटकोन त्रिकोणात,

$$OR^2 = OQ^2 + QR^2$$

$$\therefore\ r^2 = (\frac{r}{2})^2 + 6$$

$$\therefore\ r^2 - \frac{r^2}{4} = 36$$

$$\therefore\ \frac{4r^2 - r^2}{4} = 36$$

$$\therefore \frac{3r^2}{4} = 36$$

$\therefore\ r^2 = 36\ \times \frac{4}{3} = 48$

$\therefore r^2 =\ 16 \times 3$

$\therefore r =\ \sqrt{16\ \times 3}$

$\therefore r = 4\sqrt{3}$

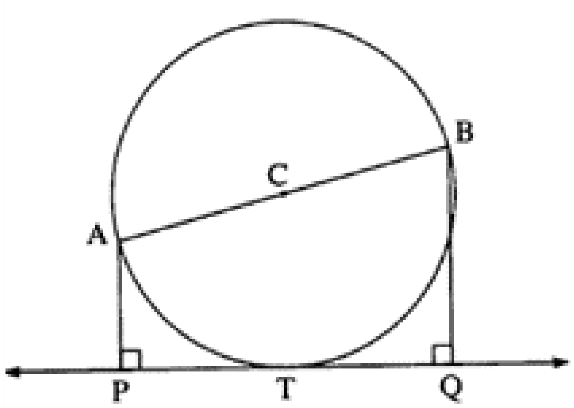
$r^2\ = \frac{r^2}{r^2} + 6$

10. आकृतीमध्ये, केंद्र C असलेल्या वर्तुळाचा रेख AB हा व्यास आहे. वर्तुळाची स्पर्शिका PQ वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करते.

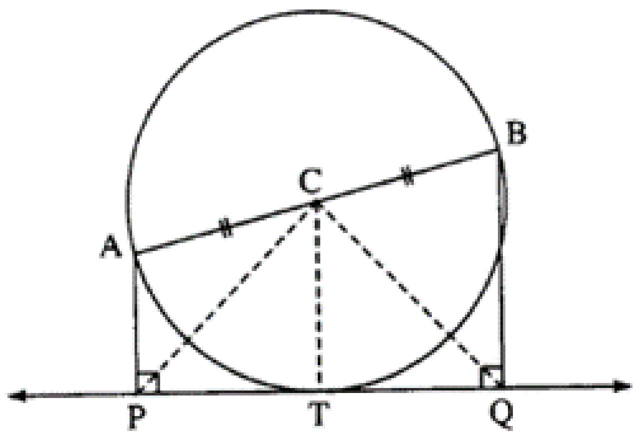
रेख AP ⊥ रेषा PQ आणि रेख BQ ⊥ रेषा PQ,

तर सिद्ध करा.-रेख CP ≅ रेख CQ.

उत्तर :



रचना : रेख CP, रेख CT व रेख CQ काढा.



सिद्धता : < 90°CTQ = 90° ____(स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय)

∴ रेख CT ⊥ रेषा PQ ____(1)

रेख AP ⊥ रेषा PQ आणि रेख BQ⊥रेषा PQ ____(दिले आहे)____ (2)

(1) व (2) वरून,

रेख AP || रेख CT || रेख BQ.

रेख AB ही त्यांची छेदिका.

रेख CA ≅ रेख CB ____(एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

∴ रेख PT ≅ रेख QT ___(तीन समांतर रेषा व छेदिकेच्या गुणधर्मावरून)

Δ CTP व Δ CTQ मध्ये ,

रेख PT ≅ रेख QT ____(वर सिद्ध केले)

रेख CT ≅ रेख CT ____(सामाईक भुजा)

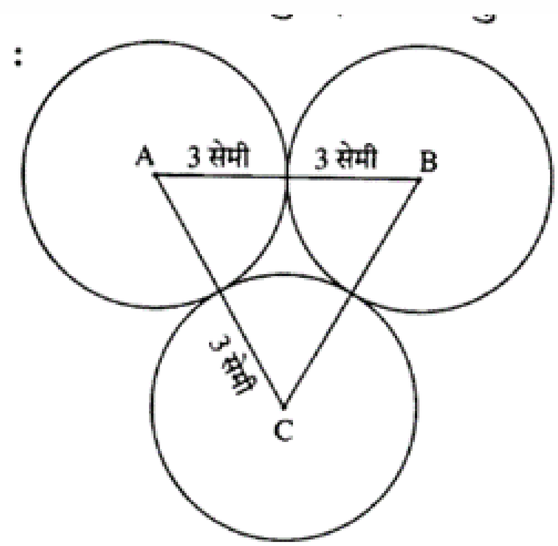
< CTP ≅ < CTQ ____(1) वरून

∴ ΔCTP ≅ Δ CTQ ____(बाकोबा एकरूपता कसोटीनुसार)

∴ रेख CP ≅ रेख CQ ____(एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

11. प्रत्येकी 3 सेमी त्रिज्येची, केंद्रे A, B व C असणारी तीन वर्तुळे अशी काढा की, प्रत्येक वर्तुळ इतर दोन वर्तुळांना स्पर्श करील.

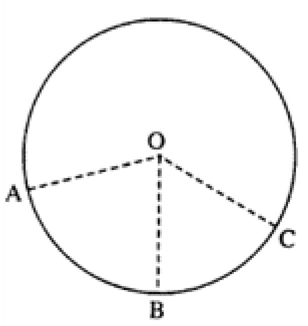
उत्तर :



[सूचना : Δ ABC हा समभुज त्रिकोण असा काढा की, AB = BC = AC = 6 सेमी. A, B व c केंद्र व 3 सेमी त्रिज्या घेऊन तीन वर्तुळ काढा.]

12. वर्तुळाचे कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नसतात, हे सिद्ध करा.

पक्ष : O केंद्र असलेल्या वर्तुळात A, B व C हे बिंदू वर्तुळावर आहेत.



साध्य : बिंदू A, B व C एकरेषीय नाहीत.

सिद्धता : समजा बिंदू A, B व C एकरेषीय आहेत. व या बिंदूतून एक वर्तुळ जाते.

वर्तुळकेंद्रातून काढलेल्या लंबदुभाजकाने रेख AB, रेख BC व रेख AC दुभागले जातील.

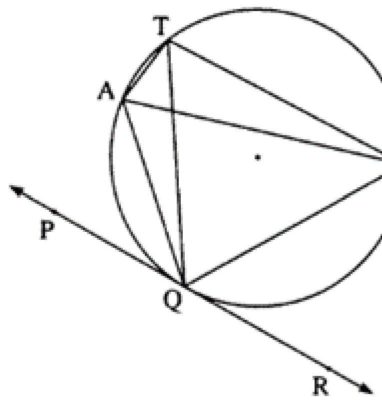
म्हणजेच केंद्रातून टाकलेला लंब या रेषेला 3 भिन्न बिंदूंत छेदील. परंतु हे विसंगत आहे, कारण केंद्रातून रेषेवर टाकलेला लंब रेषेला एकाच बिंदूत छेदतो.

∴ बिंदू A, B व C हे एकरेषीय आहेत असे मानणे चूक आहे.

∴ बिंदू A, B व C हे एकरेषीय नाहीत.

∴ वर्तुळाचे कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नसतात.

13. आकृतीमध्ये, रेषा PR वर्तुळाला बिंदू Q मध्ये स्पर्श करते. या आकृतीच्या आधारे पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा :



(i) < TAQ आणि < TSQ यांच्या मापांची बेरीज किती?

(ii) < AQP शी एकरूप असणारे कोन कोणते?

(iii) < QTS शी एकरूप असणारे कोन कोणते ?

(iv) जर < TAS = 65° तर < TQS आणि कंस TS यांची मापे सांगा.

(v)जर < AQP = 42° आणि< SQR = 58° तर < ATS चे माप काढा.

उत्तर :

रीत :

(i) < TAQ + <TSQ = 180° ___(■ TAQS या चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन)

< TAQ आणि < TSQ यांच्या मापांची बेरीज 180° आहे.

(ii) $< AQP = \frac{1}{2}$ m(कंस AQ) ____(स्पर्शिका-छेदिका प्रमेय)__ (1)

$< ASQ = < ATQ = \frac{1}{2}$ m(कंस AQ) ____(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)_(2)

$\therefore < AQP \cong < ASQ \cong < ATQ$ ____[(1) व (2) वरून]

< AQP शी एकरूप असणारे कोन < ASQ व < ATQ हे आहेत.

(iii) $< QTS = < QAS = \frac{1}{2}$ m(कंस QS) _(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)_(4)

$< SQR = \frac{1}{2}$ m(कंस QS) ____(स्पर्शिका-छेदिका प्रमेय)__ (5)

$\therefore < QTS \cong < QAS \cong < SQR$ ____[(4) व (5) वरून]

< QTS शी एकरूप असणारे कोन < QAS व < SQR हे आहेत.

(iv)

$< TAS = \frac{1}{2}$ m(कंस TS) ___(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$\therefore 65° = \frac{1}{2}$ m(कंस TS) __(दिलेली किंमत भरून)

$\therefore 65° \times 2$ = m(कंस TS)

$\therefore$ m(कंस TS) = 130°

$< TQS = \frac{1}{2}$ m(कंस TS) ____(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$= \frac{1}{2} \times 130°$

$< TQS = 65°$

(v) $< AQP = \frac{1}{2}$ m(कंस AQ) ____(स्पर्शिका – छेदिका प्रमेय)

$42° = \frac{1}{2}$ m(कंस AQ) ___(दिलेली किंमत भरून)

$42° \times 2 = \frac{1}{2}$ m(कंस AQ)

$\therefore$ m(कंस AQ) = 84°

त्याचप्रमाणे, $< SQR = \frac{1}{2}$ m(कंस QS) ____(स्पर्शिका-छेदिका प्रमेय)

$\therefore 58° = \frac{1}{2}$ m(कंस QS)

$\therefore$ m(कंस QS) = 116°

m(कंस AQ) + m(कंस QS) = m(कंस AQS) _(कंसांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

84° + 116° = m(कंस AQS)

$\therefore$ m(कंस AQS) = 200°

आता $< ATS = \frac{1}{2}$ m(कंस AQS) ____(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$= \frac{1}{2} \times 200°$ ___(7) वरून

= 100°

उत्तरे :

(i) < TAQ व < TSQ यांच्या मापांची बेरीज 180° आहे.

(ii) < AQP शी एकरूप असणारे कोन < ASQ व < ATQ हे आहेत.

(iii) < QTS शी एकरूप असणारे कोन <QAS व <SQR हे आहेत.

(iv) < TQS = 65° व m(कंस TS) = 130° आहे.

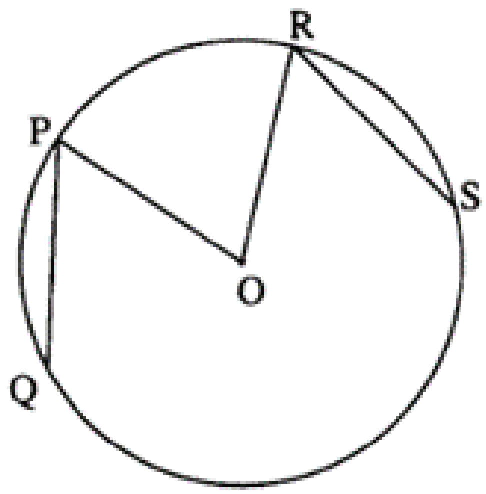
(v) < ATS = 100° आहे.

14. आकृतीत, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या रेख PQ आणि रेख RS या एकरूप जीवा आहेत. जर < POR = 70° आणि m(कंस RS) = 80°, तर

(i) m(कंस PR) किती?

(ii) m(कंस QS) किती?

(iii) m(कंस QSR) किती ?



उत्तर :

रीत : O केंद्र असलेल्या वर्तुळात रेख PQ आणि रेख RS या एकरूप जीवा आहेत. ___(दिले आहे)

एकाच वर्तुळाच्या एकरूप जीवांचे संगत कंस एकरूप असतात.

∴ m(कंस PQ) ≅ (कंस RS)

∴ m(कंस PQ) ≅ m(कंस RS) _ (एकरूप कंसांची मापे समान असतात)

∴ m(कंस PQ) = 80° ___ [∵ m(कंस RS) = 80°]

आता, < POR = m(कंस PR) ____(कंसांच्या मापांच्या व्याख्येवरून)

$\therefore$ 70° = m(कंस PR) ____($\because$ < POR = 70°)

$\therefore$ m(कंस PR) = 70°

m(कंस PQR) = 360° - m(कंस PR) ___(कंसांच्या मापांच्या व्याख्येवरून)

= $360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

m(कंस PQ) + m(कंस QS) + m(कंस SR) = m(कंस PQR)

___(कंसांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

80° + m(कंस QS) + 80° = 290° ___(किमती भरून)

$\therefore$ m(कंस QS) = $290^\circ - 160^\circ = 130^\circ$

m(कंस QSR) = m(कंस QS) + m(कंस SR)

___(कंसांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

= $130^\circ + 80^\circ$

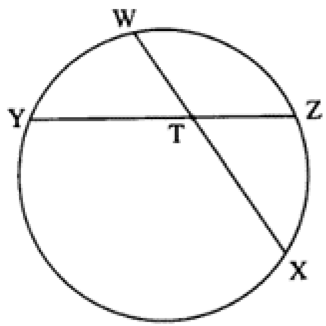
$\therefore$ m(कंस QSR) = 210°

उत्तरे : (i) m(कंस PR) = 70°;

(ii) m(कंस QS) = 130° व

(iii) m(कंस QSR) = 210° आहेत.

15. आकृतीमध्ये, m(कंस WY) = 44°, m(कंस ZX) = 68°, तर



(i) < ZTX याचे माप ठरवा.

(ii) WT = 4.8, TX = 8.0,

YT = 6.4, तर TZ = किती?

(iii) WX = 25, YT = 8, YZ = 26, तर WT = किती?

उत्तर :

रीत :

(i) वर्तुळाच्या जीवा एकमेकींना छेदत असतील, तर त्या जीवांमधील कोनाचे माप, त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेल्या कंस आणि त्याच्या विरुद्ध कोनाने अंतखंडित केलेला कंस, यांच्या मापांच्या बेरजेच्या निम्मे असते.

$\angle ZTX = \frac{1}{2}$ [m(कंस ZX) + m(कंस WY)

$= \frac{1}{2} [68^\circ + 44^\circ]$

$= \frac{1}{2} [112^\circ]$

$= 56^\circ$

(ii) जीवांच्या अंतछेदनाच्या प्रमेयावरून,

$WT \times TX = YT \times TZ$

$4.8 \times 8 = 6.4 \times TZ$

$\therefore TZ = \frac{4.8 \times 8}{6.4}$

$\therefore TZ = 6$

(iii)

$YT + TZ = YZ$ ____(Y - T - Z)

$8 + TZ = 26$

$\therefore TZ = 18$

WT = x मानू.

$WT + TX = WX$ ____(W - T - X)

$x + TX = 25$

$\therefore TX = 25 - x$

जीवांच्या अंतछेदनाच्या प्रमेयावरून,

$WT \times TX = YT \times TZ$

$x \times (25 - x) = 8 \times 18$

$\therefore 25x - x^2 = 144$

$\therefore -x^2 + 25x - 144 = 0$

$\therefore x^2 - 25x + 144 = 0$ ____(दोन्ही बाजूंना – 1 ने गुणून)

$\therefore (x - 16)(x - 9) = 0$

$\therefore x - 16 = 0$ किंवा $x - 9 = 0$

$\therefore x = 16$ किंवा $x = 9$

$\therefore WT = 16$ किंवा $WT = 9$

उत्तरे :

(i) $< ZTX = 56°$

(ii) $TZ = 6$

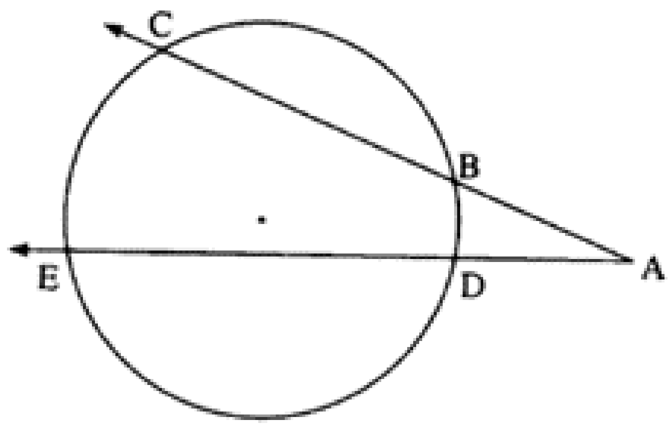
(iii) WT = 16 किंवा 9 आहेत.

16. आकृतीमध्ये, (i) m(कंस CE) = 54°, m(कंस BD) = 23°,

तर < CAE = किती?

(ii) AB = 4.2, BC = 5.4, AE = 12.0, तर AD = किती?

(iii) AB = 3.6, AC = 9.0, AD = 5.4, तर AE = किती?



उत्तर :

रीत :

(i) वर्तुळाच्या जीवांना सामावणाऱ्या रेषा वर्तुळाच्या बाह्यभागात छेदत असतील, तर त्या रेषांमधील कोनाचे माप, त्या कोनाने अंतखंडित केलेल्या कंसांच्या मापांच्या फरकाच्या निम्मे असते.

< CAE & = = $\frac{1}{2}$ [m(कंस CE) - m(कंस BD)

$= \frac{1}{2}$ $[54^\circ - 23^\circ]$ ____(किमती भरून)

$= \frac{1}{2}$ $[31^\circ]$

$= 15.5^\circ$

(ii)

AC = AB + BC ____(A - B - C)

= 4.2 + 5.4

∴ AC = 9.6

जीवांच्या बाह्यछेदनाच्या प्रमेयानुसार,

$AB \times AC = AD \times AE$

∴ $4.2 \times 9.6 = AD \times 12$ ____(किमती भरून)

∴ $AD = \frac{4.2 \times 9.6}{12}$

= 3.36

(iii) जीवांच्या बाह्यछेदनाच्या प्रमेयानुसार,

$AB \times AC = AD \times AE$

$3.6 \times 9 = 5.4 \times AE$

$\therefore AE = \frac{3.6 \times 9}{5.4}$

$= 6$

उत्तरे :

(i) $< CAE = 15.5°$

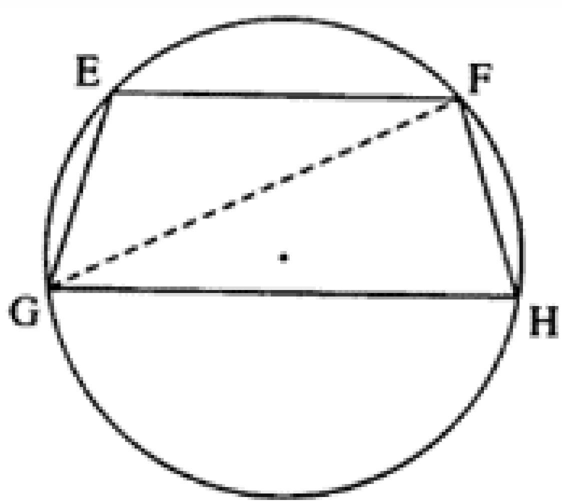
(ii) AD=3.36 व

(iii) AE=6 आहेत.

17. आकृतीत, जीवा EF || जीवा GH.

तर सिद्ध करा, जीवा EG ≅ जीवा FH.

पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरा आणि सिद्धता लिहा :



सिद्धता : रेख GF काढला.

< EFG = < FGH (□)__(1)

< EFG = □ __(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)__(2)

< FGH = □ __(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)__(3)

m(कंस EG) = □ ____ [(1), (2) व (3) वरून]

जीवा EG ≅ जीवा FH __(□)

व्युत्क्रम कोन

उत्तर : रेख GF काढला.

< EFG = < FGH (व्युत्क्रम कोन)__(1)

< EFG = $\frac{1}{2}m(\text{कंस EG})$ _(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)__(2)

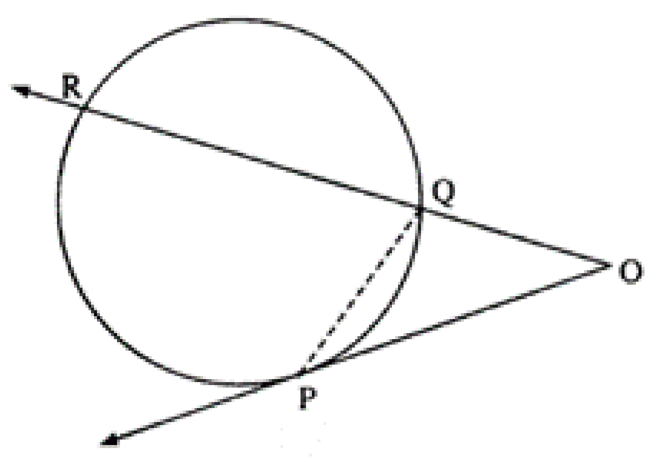
< FGH = $\frac{1}{2}m(\text{कंस FH})$ __(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)__(3)

m(कंस EG) = $\frac{1}{2}m(\text{कंस FH})$ ____ [(1), (2) व (3) वरून]

जीवा EG ≅ जीवा FH

__(एकरूप कंसांच्या संगत जीवा एकरूप असतात.)

18. आकृतीत, बिंदू P स्पर्शबिंदू आहे.



(i) m(कंस PR) = 140°, < POR = 36°; तर m(कंस PQ) = किती?

(ii) OP = 7.2, OQ = 3.2, OR = किती? QR = किती?

(iv) OP = 7.2, OR = 16.2, तर QR = किती?

उत्तर :

रीत :

(i) रेख PQ काढा.

$< PQR = \frac{1}{2} m($कंस PR$)$ ____(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$= \frac{1}{2} \times 140°$ ____(किमती भरून)

$= 70°$

$< PQR$ हा ΔPQO चा बाह्यकोन आहे.

$< PQR = < QPO + < POQ$

$70° = < QPO + 36°$ ____(किमती भरून)

$\therefore < QPO = 70° - 36° = 34°$

$< QPO = \frac{1}{2} m($कंस PQ$)$ ____(स्पर्शिका – छेदिका प्रमेय)

$\therefore 34° = \frac{1}{2} m($कंस PQ$)$

$\therefore$ m(कंस PQ) = 68°

(ii) स्पर्शिका-छेदिका रेषाखंडाच्या प्रमेयानुसार,

$OP^2 = OQ \times OR$

$\therefore\ 7.2^2 = 3.2 \times OR$ ____(किमती भरून)

$\therefore\ OR = \frac{7.2 \times 7.2}{3.2}$

$= 16.2$

OR = OQ + QR ____(O - Q - R)

16.2 = 3.2 + QR

$\therefore$ QR = 16.2 - 3.2

QR = 13

(iii) स्पर्शिका-छेदिका रेषाखंडाच्या प्रमेयानुसार,

$OP^2 = OQ \times OR$

$\therefore\ 7.2^2 = OQ \times 16.2$ ____(किमती भरून)

$\therefore\ OQ = \frac{7.2 \times 7.2}{16.2}$

$= 3.2$

OR = OQ + QR ____(O - Q - R)

16.2 = 3.2 + QR

$\therefore$ QR = 16.2 - 3.2

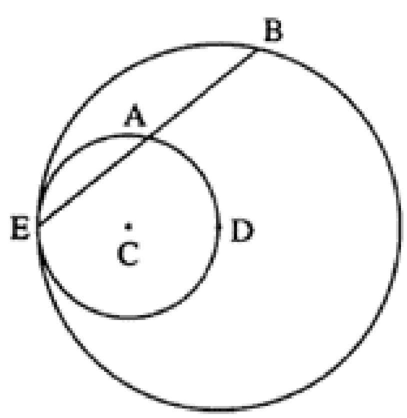
$\therefore$ QR = 13

उत्तरे : (i) m(कंस PQ) = 68°;

(ii) OR = 16.2, QR = 13 व

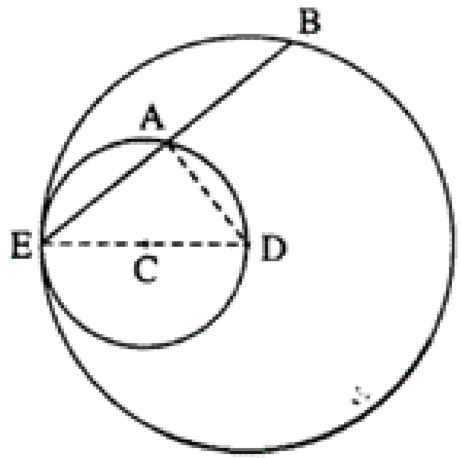
(iii) QR = 13 आहेत.

19. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र C असलेले वर्तुळ हे केंद्र D असलेल्या वर्तुळाला बिंदू E मध्ये आतून स्पर्श करते. बिंदू D हा आतील वर्तुळावर आहे. बाहेरील वर्तुळाची जीवा EB ही आतील वर्तुळाला बिंदू A मध्ये छेदते. तर सिद्ध करा की, रेख EA ≅ रेख AB.



उत्तर :

रचना : रेख AD व रेख ED काढा.



सिद्धता : स्पर्शवर्तुळांच्या प्रमेयानुसार, E-C-D रेख ED हा लहान वर्तुळाचा व्यास असून, A हा वर्तुळावरील बिंदू आहे.

$\angle$ EAD = 90° ____(अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित कोन काटकोन असतो)

∴ रेख DA ⊥ जीवा EB.

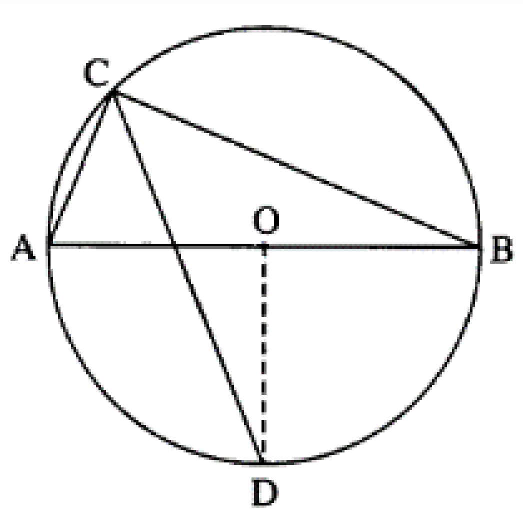
D हा मोठ्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आहे.

केंद्रातून जीवेवर काढलेल्या लंबाने जीवा दुभागली जाते.

∴ रेख EA ≅ रेख AB.

20. आकृतीमध्ये, रेख AB हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. अंतर्लिखित कोन ACB चा दुभाजक वर्तुळाला बिंदू D मध्ये छेदतो. तर रेख AD ≅ रेख BD हे सिद्ध करा.

पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून ती पूर्ण करा आणि लिहा :



सिद्धता : रेख OD काढला.

< ACB = □ ___(अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित कोन)

< DCB = □ ___(रेख CD हा < C चा दुभाजक)

m(कंस DB) = □ ___(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

< DOB = □ ____(कंसाच्या मापाची व्याख्या)___ (1)

रेख OA ≅ रेख OB ____ (2)

∴ रेषा OD ही रेख AB ची □ रेषा आहे. ____[(1) व (2) वरून]

∴ रेख AD ≅ रेख BD ____ □

उत्तर : रेख OD काढला.

< ACB = 90° ___(अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित कोन)

< DCB = 45° ___(रेख CD हा < C चा दुभाजक)

m(कंस DB) = 90° ___(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

< DOB = 90° ____(कंसाच्या मापाची व्याख्या)___ (1)

रेख OA ≅ रेख OB ____ एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या (2)

∴ रेषा OD ही रेख AB ची लंबदुभाजक रेषा आहे. ____[(1) व (2) वरून]

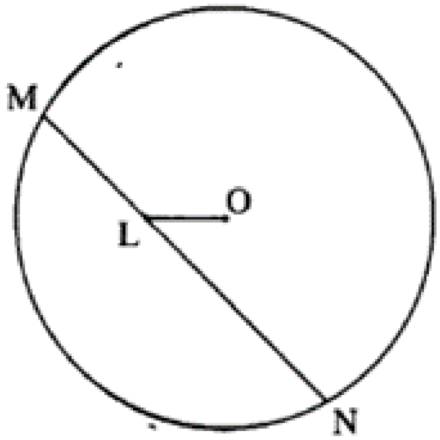
∴ रेख AD ≅ रेख BD

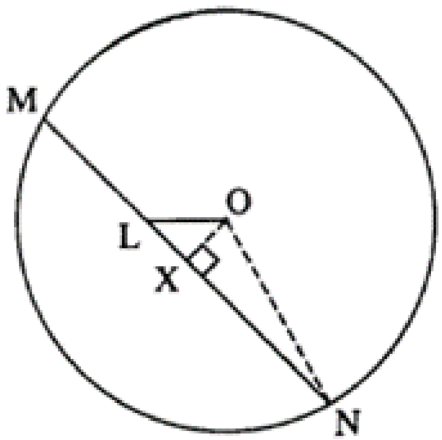
___ लंबदुभाजकावरील बिंदू रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर असतो

21. आकृतीत, रेख MN ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळातील जीवा आहे.

MN = 25, जीवा MN वर बिंदू L असा आहे की, ML = 9 आणि

d (O, L) = 5; तर या वर्तुळाची त्रिज्या किती असेल?





उत्तर :

रीत : रेख OX ⊥ जीवा MN काढा. M-X-N

केंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवा दुभागतो.

∴ MX = NX = 12.5

आता, ML + LX = MN ____(M-L-X)

9 + LX = 12.5

∴ LX = 12.5 - 9

∴ LX = 3.5

Δ OXL या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$OL^2 = OX^2 + LX^2$

∴ $5^2 = OX^2 + 3.5^2$ ____(किमती भरून)

∴ $25 = OX^2 + 12.25$

∴ $OX^2 = 25 - 12.25$

∴ $OX^2 = 12.75$ _____(1)

OL = Ox2 + LX2 .∴. 52 = ox2 + 3.52

आता, Δ OXN या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$ON^2 = OX^2 + NX^2$

∴ $ON^2 = 12.75 + 12.5^2$ ____ (1) वरून

∴ $ON^2 = 12.75 + 156.25 = 169$

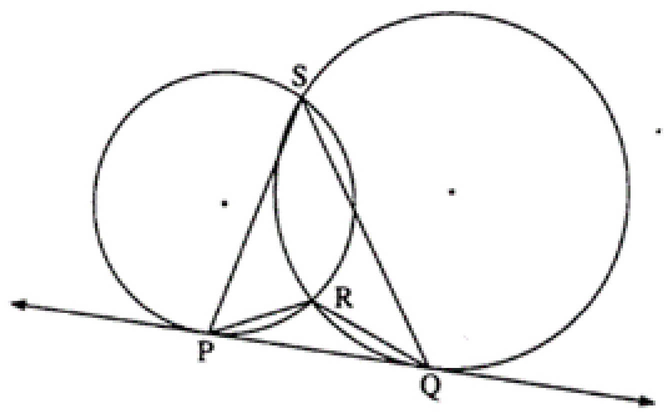
∴ $ON = 13$ _____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

∴ $r = 13$

उत्तर : वर्तुळाची त्रिज्या 13 आहे.

22. आकृतीमध्ये, दोन वर्तुळे परस्परांना बिंदू S व R मध्ये छेदतात. त्यांची रेषा PQ ही सामाईक स्पर्शिका त्यांना बिंदू P व Q मध्ये स्पर्श करते.

तर सिद्ध करा – $\angle PRQ + \angle PSQ = 180°$

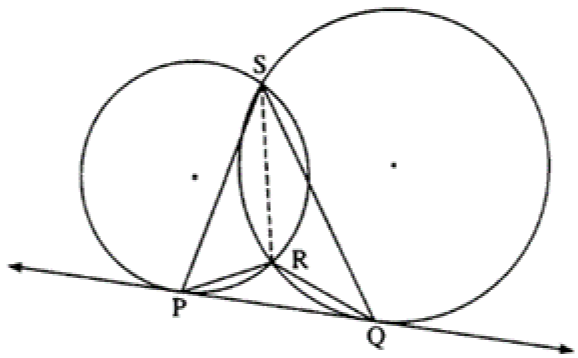


उत्तर :

रचना : रेख SR काढा.

सिद्धता : $\angle PSR = \frac{1}{2} m(\text{कंस } PR)$ ___(अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)___(1)

व $\angle RPQ = \frac{1}{2} m(\text{कंस } PR)$ ___(स्पर्शिका-छेदिका प्रमेय)___ (2)



(1) व (2) वरून,

< PSR = < RPQ ____(3)

त्याचप्रमाणे, सिद्ध करता येईल की,

< QSR = < RQP ____(4)

Δ RPQ मध्ये ,

< RPQ + < RQP + < PRQ = 180° __(त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.)

< PSR + <QSR + < PRQ = 180° __([(3) व (4) वरून]

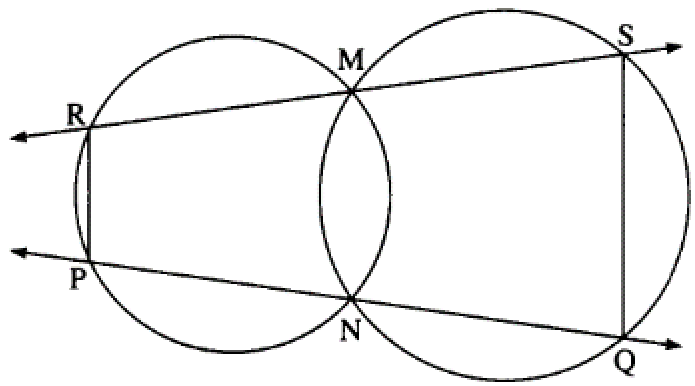
पण, < PSR + <QSR = <PSQ ___ (कोनांच्या बेरजेचे गृहीतक) ___ (5)

< PSQ + < PRQ = 180° ____(5) वरून

म्हणजेच ,

< PRQ + < PSQ = 180°

23. आकृतीमध्ये, दोन वर्तुळे एकमेकांना बिंदू M व N मध्ये छेदतात. बिंदू M व N मधून काढलेल्या वृत्तछेदिका बिंदू R व S मध्ये आणि बिंदू P व Q मध्ये छेदतात. तर रेख PR || रेख QS हे सिद्ध करा.



उत्तर :

रचना : रेख MN काढा.

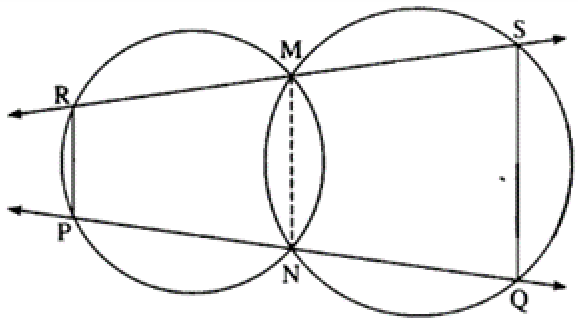
सिद्धता : ■ PRMN हा चक्रीय चौकोन असून, < MNQ हा त्याचा बाह्यकोन आहे. ___(आकृतीवरून)

चक्रीय चौकोनाचा बाह्यकोन हा त्याच्या संलग्न कोनाच्या संमुख कोनाशी एकरूप असतो.

$\therefore < R \cong < MNQ$ ____(1)

त्याचप्रमाणे सिद्ध करता येईल की,

< S ≅ < MNP ____(2)



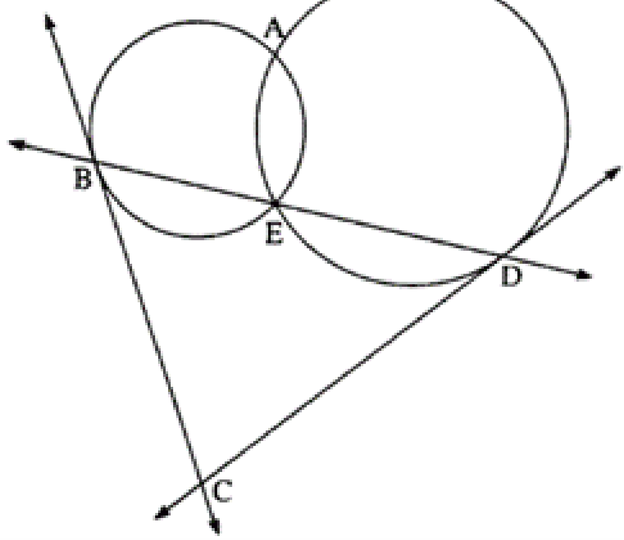
< MNP + < MNQ = 180° ___(रेषीय जोडीतील कोन)____(3)

< R + < S = 180° ____[(1), (2) व (3) वरून]

∴ रेख PR || रेख QS ____ (आंतरकोन कसोटी)

24. दोन वर्तुळे परस्परांना बिंदू A व E मध्ये छेदतात. बिंदू E मधून काढलेली त्यांची सामाईक वृत्तछेदिका वर्तुळांना बिंदू B व D मध्ये छेदते. बिंदू B व D मधून काढलेल्या स्पर्शिका एकमेकींना बिंदू C मध्ये छेदतात.

सिद्ध करा : ■ ABCD चक्रीय आहे.



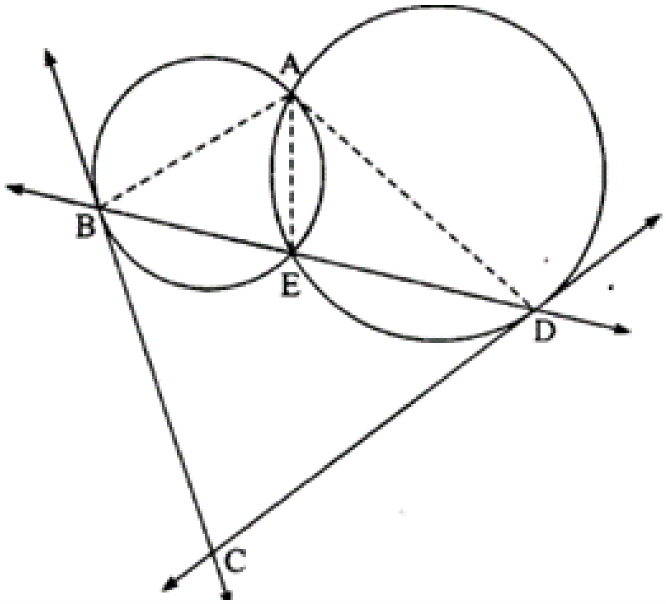
उत्तर :

रचना : रेख AB, रेख AE व रेख AD काढा.

सिद्धता : स्पर्शिका-छेदिका कोनाच्या प्रमेयावरून,

$< CBE = \frac{1}{2}$ (कंस BE) ____(1)

$< CDE = \frac{1}{2}$(कंस DE) ____(2)



अंतर्लिखित कोनाच्या प्रमेयावरून,

$< BAE = \frac{1}{2}$(कंस BE) ____(3)

$< DAE = \frac{1}{2}$(कंस DE) ____(4)

(1), (2), (3) व (4) वरून,

$< CBE = < BAE$ ____ (5)

व $< CDE = < DAE$ ____ (6)

Δ CBD मध्ये ,

$< CBD + < CDB + < C = 180°$ ___(त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.)

$< CBE + < C = 180°$ ___(तेच कोन पण अंत्यबिंदू भिन्न)

$\therefore < BAE + < DAE + < C = 180^\circ$ ___ (5) व (6) वरून

$\therefore < BAD + < C = 180^\circ$ ___(7)

■ ABCD मध्ये,

$< BAD + < C + < ABC + < ADC = 360^\circ$ ___(चौकोनाच्या चार कोनांच्या मापांची बेरीज 360° असते.)

$\therefore 180^\circ + < ABC + < ADC = 360^\circ$ ___(7) वरून

$\therefore < ABC + < ADC = 180^\circ$ ____(8)

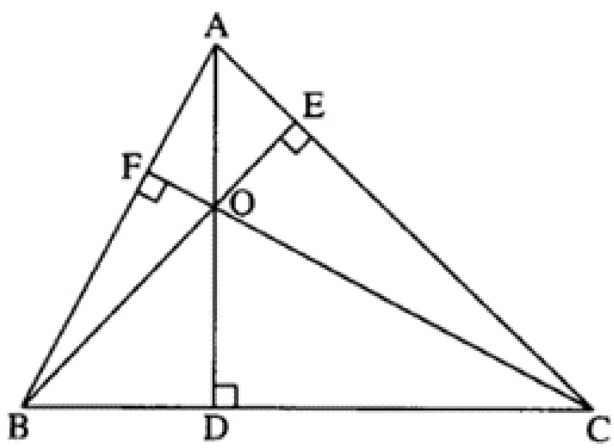
(7) व (8) वरून,

■ ABCD च्या संमुख कोनांच्या मापांची बेरीज 180° आहे.

∴ ■ ABCD चक्रीय आहे.

25. ΔABC मध्ये, रेख AD ⊥ बाजू BC, रेख BE ⊥ बाजू AC,

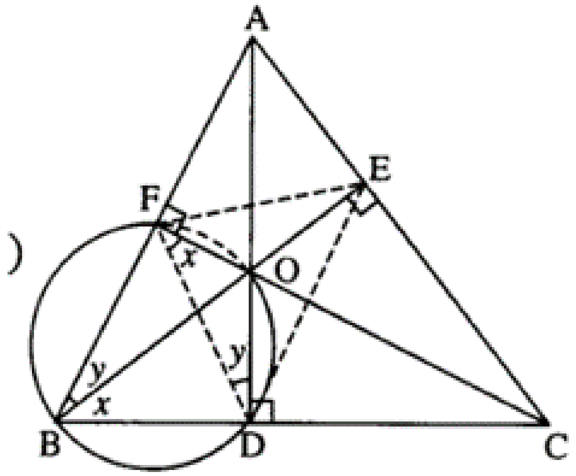
रेख CF ⊥ बाजू AB. बिंदू O हा शिरोलंबसंपात आहे. तर बिंदू O हा Δ DEF चा अंतर्मध्य होतो, हे सिद्ध करा.



उत्तर :

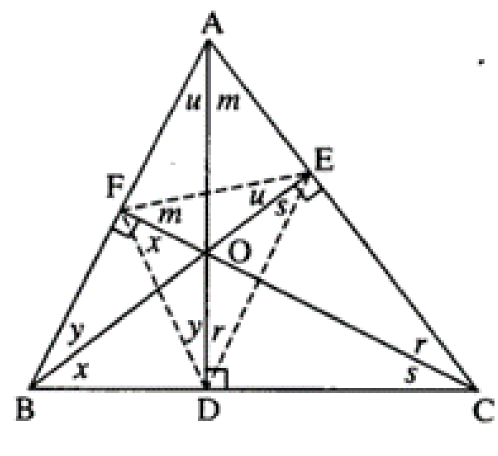
सिद्धता :

< OFB = 90° व < ODB} = 90° ___(दिले आहे.)



$\therefore < OFB + < ODB = 90^\circ + 90^\circ$

$\therefore < OFB + < ODB = 180^\circ$ ___(1)



(ii)

∴ ■ FODB चक्रीय चौकोन आहे. ____[(1) वरून] |

एकाच कंसातील अंतर्लिखित कोन एकरूप असतात.

$\therefore < FBO \cong < FDO$

<FBO = < FDO = y मानू.

त्याचप्रमाणे, < DFO = < DBO = x मानू.

तसेच, ■ EODC व ■ FOEA हे चक्रीय आहेत.

■ EODC मध्ये ,

< ECO = < EDO = r व < DEO = < DCO = s मानू

■ FOEA मध्ये, < EFO = < EAO = m व

< FAO = < FEO = u मानू

Δ ABD मध्ये ,

<ADB = 90° ___(दिले आहे.)

∴ < DAB + < ABD = 90° ___ (त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.)

∴ x + y + u = 90° ____(3)

त्याचप्रमाणे, Δ FBC मध्ये , < BFC = 90° ___(दिले आहे.)

∴ x + y + s = 90° ___(4)

∴ u = s ___(3) व (4) वरून___ (5)

Δ AEB मध्ये ,

< AEB = 90° ___ (दिले आहे.)

∴ u + m + y = 90° ___(7)

Δ AFC मध्ये ,

< AFC = 90° ___ (दिले आहे.)

∴ u + m + r = 90°

∴ $y = r$ ___(6) व (7) वरून___(8)

त्याचप्रमाणे सिद्ध करता येईल की, x = m___(9)

(5), (8) व (9) वरून,

< FED चा रेख EO कोनदुभाजक; < EFD चा रेख FO दुभाजक व

< FDE चा रेख DO कोनदुभाजक असून, ते O या बिंदूत छेदतात.

∴ बिंदू O हा Δ DEF चा अंतर्मध्य आहे.