5. निर्देशक भूमिती

सरावसंच 5.1

प्र. 1. खाली दि लेल्या बिंदूंच्या प्रत्येक जोडीतील अंतर काढा.

(1) A(2, 3), B(4, 1)

(2) P(-5, 7), Q(-1, 3)

(3) R(0, -3), S(0, $\frac{5}{2}$)

(4) L(5, -8), M(-7, -3)

(5) T(-3, 6), R(9, -10)

(6) W($-\frac{7}{2}$, 4), X(11, 4)

रीत:

(1) A(2, 3), B(4, 1)

$A(X_1, Y_1)$आणि $B(X_2, Y_2)$ मानू,

$X_1 = 2, Y_1 = 3, X_2 = 4, Y_2 = 1$

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$$d(A, B) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$= \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2}$

$= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{4+4}$

$= \sqrt{8}$

$= \sqrt{4 \times 2}$

$= 2\sqrt{2}$

उत्तर : बिंदू A आणि B मधील अंतर $2\sqrt{2}$ आहे.

(2) P(-5, 7), Q(-1, 3)

$P(X_1, Y_1)$ आणि $Q(X_2, Y_2)$ मानू,

$X_1 = -5, Y_1 = 7, X_2 = -1, Y_2 = 3$

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$d(P, Q) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$

$= \sqrt{(-1-(-2))^2 + (3-7)^2}$

$= \sqrt{(-1+5)^2+(-4)^2}$

$= \sqrt{(4)^2+(-4)^2}$

$= \sqrt{16+16}$

$=\sqrt{32}$

$= \sqrt{16\times 2}$

$= 4\sqrt{2}$

उत्तर : बिंदू P व Q मधील अंतर $4\sqrt{2}$ आहे.

(3) R(0, -3), S(0, $\frac{5}{2}$)

$R(X_1, Y_1)$आणि $S(X_2, Y_2)$ मानू,

$X_1 = 0, Y_1 = -3, X_2 = 0 , Y_2 = \frac{5}{2}$

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$d(R,S) = \sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2}$

$= \sqrt{(0-0)^2+(\frac{5}{2}-(-3))^2}$

$= \sqrt{0^2 + (\frac{5}{2} + 3)^2}$

$= \sqrt{(\frac{5+6}{2})^2}$

$= \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$

उत्तर : बिंदू R व S मधील अंतर $\frac{11}{2}$ आहे.

(4) L(5, -8), M(-7, -3)

$\mathrm{L}(X_1, Y_1)$आणि $M(X_2, Y_2)$ मानू,

$X_1 = 5, Y_1 = -8, X_2 = -7 , Y_2 = -3$

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$d(L, M) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$

$= \sqrt{(-7-5)^2 + (-3-(-8))^2}$

$= \sqrt{(-12)^2 + (-3+8)^2}$

$= \sqrt{(-12)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{144 + 25}$

$=\sqrt{169}$

= 13

उत्तर : बिंदू L व M मधील अंतर 13 आहे.

(5) T(-3, 6), R(9, -10)

$\mathrm{T}(X_1, Y_1)$आणि $R(X_2, Y_2)$ मानू,

$X_1 = -3, Y_1 = 6, X_2 = 9, Y_2 = -10$

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$d(T, R) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$

$= \sqrt{(9 - (-3))^2 + (-10 - 6)^2}$

$= \sqrt{(9 + 3)^2 + (-16)^2}$

$= \sqrt{(12)^2 + (-16)^2}$

$= \sqrt{144 + 256}$

$=\sqrt{400}$

$= 20$

उत्तर : बिंदू T व R मधील अंतर 20 आहे.

(6) $W(-\frac{7}{2}, 4)$, $X(11, 4)$

$W(X_1, Y_1)$आणि $X(X_2, Y_2)$ मानू,

$X_1 = -\frac{7}{2}, Y_1 = 4, X_2 = 11, Y_2 = 4$

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$$d(W, X) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(11 - (-\frac{7}{2}))^2 + (4 - 4)^2}$$

$$= \sqrt{(11 + \frac{7}{2})^2 + 0^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{22+7}{2})^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{29}{2})^2}$$

$$= \frac{29}{2}$$

उत्तर : बिंदू W व X मधील अंतर $\frac{29}{2}$ आहे.

प्र. 2. खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत हे ठरवा.

(1) A(1, -3), B(2, -5), C(-4, 7)

(2) L(-2, 3), M(1, -3), N(5, 4)

(3) R(0, 3), D(2, 1), S(3, -1)

(4) P(-2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)

रीत:

(1) A(1, -3), B(2, -5), C(-4, 7)

$d(A,B) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ ___ अंतराचे सूत्र

$= \sqrt{(2-1)^2 + (-5-(-3))^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-5+3)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ ____(1)

$d(A,C) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ ___ अंतराचे सूत्र

$= \sqrt{(-4-1)^2 + (7-(-3))^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (10)^2}$

$= \sqrt{25+100} = \sqrt{125}$

$= \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$ ____(2)

$d(B,C) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ ___ अंतराचे सूत्र

$= \sqrt{(-4-2)^2 + (7-(-5))^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (12)^2}$

$= \sqrt{36+144} = \sqrt{180}$

$= \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$ ____(3)

(1), (2) आणि (3) वरून,

$\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

$\therefore$ d(B,A) + d(A,C) = d(B,C)

$\therefore$ बिंदू A, B व C हे एकरेषीय आहेत.

उत्तर : A(1, - 3); B(2, - 5); C(– 4, 7) हे बिंदू एकरेषीय आहेत.

(2) L(-2, 3), M(1, -3), N(5, 4)

$d(L, M) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ ___ अंतराचे सूत्र

$= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-3 - 3)^2}$

$= \sqrt{(1 + 2)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$

$= \sqrt{9 \times 5}$

$= 3\sqrt{5}$ ____(1)

$d(L, N) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ ___ अंतराचे सूत्र

$= \sqrt{(5 - (-2))^2 + (4 - 3)^2}$

$= \sqrt{(5 + 2)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{(7)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$

$= \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ ____(2)

$d(M, N) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ ___ अंतराचे सूत्र

$= \sqrt{(5 - 1)^2 + (-4 - 3)^2}$

$= \sqrt{(4)^2 + (-7)^2}$

$= \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$ ____(3)

$3\sqrt{5}$, $5\sqrt{2}$, $\sqrt{65}$ यांपैकी सर्वांत मोठी संख्या $\sqrt{65}$ आहे

. $3\sqrt{5} + 5\sqrt{2} \neq \sqrt{65}$

बिंदू L, M व N हे एकरेषीय नाहीत.

(3) R(0, 3), D(2, 1), S(3, -1)

$d(R, D) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ ___ अंतराचे सूत्र

$$= \sqrt{(2-0)^2 + (1-3)^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$= \sqrt{4 \times 2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$ ____(1)

$$d(R,S) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$ ___ अंतराचे सूत्र

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (-1-3)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$= 5$$ ____(2)

$$d(D,S) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$ ___ अंतराचे सूत्र

$$= \sqrt{(3-2)^2 + (-1-1)^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$$

$= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ ____(3)

. $2\sqrt{2} + 5 \neq \sqrt{5}$ ___(सर्वांत मोठी संख्या 5 आहे)

बिंदू R, D व S हे एकरेषीय नाहीत.

R(0, 3), D(2, 1), S(3, -1) हे बिंदू एकरेषीय नाहीत.

(4) P(-2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)

$d(P,Q) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ ___ अंतराचे सूत्र

$= \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-3)^2}$

$= \sqrt{(1+2)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ ____(1)

$d(Q,R) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ ___ अंतराचे सूत्र

$= \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ ____(2)

$d(P,R) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ ___ अंतराचे सूत्र

$= \sqrt{(4-(-2))^2 + (1-3)^2}$

$= \sqrt{(4+2)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

$= \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$ ____(3)

(1), (2) आणि (3) वरून,

$\sqrt{10} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

$\therefore$ d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)

$\therefore$ बिंदू A, B व C हे एकरेषीय आहेत.

उत्तर : P(-2, 3), Q(1, 2), R(4, 1) हे बिंदू एकरेषीय आहेत.

प्र 3. X- अक्षावरील असा बिंदू शोधा की जो बिंदू A(-3, 4) आणि B(1, -4) यांच्यापासून समदूर आहे.

रीत : समजा, X-अक्षावरील बिंदू M(x, o) हा बिंदू A व B पासून समान अंतरावर आहे.

MA = MB

$\therefore$ $MA^2 = MB^2$

$\therefore [X-(-3)]^2 + [0-4^2] = (X-1)^2 + (0-4)^2$

$\therefore (X+3)^2 + (-4)^2 = (X-1)^2 + (-4)^2$

$\therefore X^2 + 6X + 9 + 16 = X^2 - 2X + 1 + 16$

$\therefore 6X + 25 = -2X + 17$

$\therefore\ 6X + 2X = 17 - 25$

$\therefore\ 8X = -8$

$\therefore X = -\frac{8}{8}$

$\therefore X = -1$

A(– 3, 4) आणि B(1, – 4) या बिंदूंपासून समान अंतरावर असणाऱ्या X-अक्षावरील बिंदूचे निर्देशक (- 1,0) आहेत.

प्र 4. P(-2, 2), Q(2, 2) आणि R(2, 7) हे काटकोन त्रिकोणाचे शि रोबि ंदू आहेत, हे पडताळून पाहा.

उत्तर:

P(– 2, 2); Q(2, 2) आणि R(2, 7) हे दिलेल्या काटकोन त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत.

त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी अंतराच्या सूत्रावरून काढू.

PQ = $\sqrt{[2-(-2)]^2+(2-2)^2}$

= $\sqrt{(2+2)^2+0^2}$

$= \sqrt{(4)^2} = 4$ ____(1)

QR $= \sqrt{(2-2)^2 + (7-2)^2}$

$= \sqrt{(0)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{(5)^2} = 5$ ____(2)

PR $= \sqrt{[2-(-2)]^2 + (7-2)^2}$

$= \sqrt{(2+2)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{(4)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$ ____(3)

(1), (2) आणि (3) वरून,

$\sqrt{41}^2 = 41$ व $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$

$\therefore\ PR^2 = PQ^2 + QR^2$

पायथागोरसच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार,

P(– 2, 2); Q(2, 2) आणि R(2, 7) हे काटकोन त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत.

प्र 5. P(2, -2), Q(7, 3), R(11, -1) आणि S (6, -6) हे शि रोबि ंदू असलेला चौकोन समांतरभुज आहे हे दाखवा.

सिद्धता : समांतरभुज चौकोनात संमुख बाजूंची लांबी समान असते.

अंतराच्या सूत्रानुसार,

PQ $= \sqrt{(7-2)^2 + [3-(-2)]^2}$

$= \sqrt{(5)^2 + (3+2)^2}$

$= \sqrt{(5)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{25 + 25}$

$= \sqrt{50}$

$= \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ ____(1)

QR $= \sqrt{(11+7)^2 + (-1-3)^2}$

$= \sqrt{(4)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{16+16}$

$= \sqrt{32}$

$= \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$ ____(2)

RS $= \sqrt{(6-11)^2 + [-6-(-1)]^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (-6+1)^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{25+25}$

$= \sqrt{50}$

$= \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ ____(3)

$$PS = \sqrt{(6-2)^2 + [-6-(-2)]^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (-6+2)^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{16+16}$$

$$= \sqrt{32}$$

$$= \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \qquad ____(4)$$

$$PR = \sqrt{(11-2)^2 + [-1-(-2)]^2}$$

$$= \sqrt{(9)^2 + (-1+2)^2}$$

$$= \sqrt{(9)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{81+1}$$

$$= \sqrt{82} \qquad ____(5)$$

$$SQ = \sqrt{(6-7)^2 + [-6-(-3)]^2}$$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-6+3)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{1+9}$

$= \sqrt{10}$ ____(6)

(1), (2), (3) व (4) वरून,

PQ = RS व QR = PS

या चौकोनाच्या संमुख बाजू असून समान लांबीच्या आहेत.

P(2, – 2); Q(7, 3); R(11, – 1) आणि S(6, – 6) हे शिरोबिंदू असलेला चौकोन समांतरभुज आहे.

प्र 6. A(-4, -7), B(-1, 2), C(8, 5) आणि D(5, -4) हे ABCD या समभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत हे दाखवा.

AB $= \sqrt{[-1-(-4)]^2 + [2-(-7)]^2}$

$= \sqrt{(-1+4)^2 + (2+7)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (9)^2}$

$= \sqrt{9 + 81}$

$= \sqrt{90}$

$= \sqrt{9 \times 10} \quad = 3\sqrt{10}$ ____(1)

BC $= \sqrt{[8 - (-1)]^2 + (5 - 7)]^2}$

$= \sqrt{(9)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{9 + 81}$

$= \sqrt{90}$

$= \sqrt{9 \times 10} \quad = 3\sqrt{10}$ ____(2)

CD $= \sqrt{(5 - 8)]^2 + (-4 - 5)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2}$

$= \sqrt{9 + 81}$

$= \sqrt{90}$

$= \sqrt{9 \times 10} \quad = 3\sqrt{10}$ ____(3)

$AD = \sqrt{[5-(-4)]^2 + [-4-(-7)]^2}$

$= \sqrt{(9)^2 + (-4+7)^2}$

$= \sqrt{(9)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{81 + 9}$

$= \sqrt{90}$

$= \sqrt{9 \times 10} \quad = 3\sqrt{10}$ ____(4)

$AC = \sqrt{[8-(-4)]^2 + [5-(-7)]^2}$

$= \sqrt{(8+4)^2 + (5+7)^2}$

$= \sqrt{(12)^2 + (12)^2}$

$= \sqrt{144 + 144}$

$= \sqrt{288}$

$= \sqrt{144 \times 2} \quad = 12\sqrt{2}$ ____(5)

$BD = \sqrt{[5-(-1)]^2 + (-4-2)^2}$

$= \sqrt{(5+1)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{36+36}$

$= \sqrt{72}$

$= \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$ ____ (6)

(1), (2), (3) (4) (5) व (6) वरून,

AC = BC = CD = AD या चौकोनाच्या बाजू समान लांबीच्या आहेत.

$AC \neq BD$ हे कर्ण असमान लांबीचे आहेत.

A(– 4, – 7); B(– 1, 2); C(8, 5) आणि D(5, -4) हे ABCD या समभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत.

प्र 7. जर बिंदू L(x, 7) आणि M(1, 15) यातील अंतर 10 असेल, तर x ची किंमत काढा.

रीत : $L(x,7) = (X_1, Y_1)$ व $M(1, 15) = (X_2, Y_2)$

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$LM^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$

$\therefore\ 10^2 = (1 - X)^2 + (15 - 7)^2$

$\therefore 100 = 1 - 2X + X^2 + 8^2$

$\therefore 100 = 1 - 2X + X^2 + 64$

$\therefore 100 = X^2 - 2X + 65$

$\therefore\ X^2 - 2X + 65 - 100 = 0$

$\therefore\ X^2 - 2X - 35 = 0$

$\therefore (X-7)(X+5)=0$

$\therefore (X-7)=0$ किंवा $(x+5)=0$

$\therefore x=7$ किंवा $x=-5$

उत्तर : $x=7$ किंवा $x=-5$ आहे.

प्र 8. A(1, 2), B(1, 6), C(1 + 2 3 , 4) हे समभुज त्रिकोणाचे शि रोबि ंदू आहेत हे दाखवा.

रीत : A(1, 2); B(1, 6) आणि C(1 + 2\sqrt{3},4) हे दिलेल्या समभुज त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत.

त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी अंतराच्या सूत्रावरून काढू.

$AB = \sqrt{(1-1)]^2+(6-2)^2}$

$= \sqrt{0+(4)^2}$

$= \sqrt{(4)^2} = 4$ ____(1)

$BC = \sqrt{\left(1+2\sqrt{3}-1\right)^2+(4-6)^2}$

$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{4 \times 3 + 4}$

$= \sqrt{12 + 4}$

$= \sqrt{16} = 4$ ____(2)

AC $= \sqrt{\left(1 + 2\sqrt{3} - 1\right)^2 + (4 - 2)^2}$

$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{4 \times 3 + 4}$

$= \sqrt{12 + 4}$

$= \sqrt{16} = 4$ ____(3)

(1), (2) व (3) वरून,

AB = BC = AC

∴ Δ ABC हा समभुज त्रिकोण आहे.

सरावसंच 5.2

प्र 1. जर P बिंदू हा A(-1,7) आणि B(4,-3) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे 2 : 3 या गुणोत्तरात विभाजन करत असेल तर P बिंदूचे निर्देशक काढा.

उत्तर :

रीत : दिलेल्या उदाहरणात (X_1, Y_1)=(-1,7) आणि $(X_2, Y_2) = (4, -3)$ मानू,

तसेच m : n = 2 : 3

समजा P बिंदूचे निर्देशक (X,Y) आहेत.

∴ रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$X = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ आणि $y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$

$\therefore x = \frac{2 \times 4 + 3 \times (-1)}{2+3}$ आणि $y = \frac{2 \times (-3) + 3 \times 7}{2+3}$

$\therefore x = \frac{8-3}{5}$ आणि $y = \frac{-6+21}{5}$

$\therefore x = \frac{5}{5}$ आणि $y = \frac{15}{5} = 3$

P या बिंदूचे निर्देशक (1, 3) आहेत.

प्र 2. पुढील प्रत्येक उदाहरणात, रेख PQ चे a : b या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या A या बिंदूचे निर्देशक काढा :

(i) P(- 3, 7); Q(1, - 4); a : b = 2 : 1

(ii) P(– 2, – 5); Q(4, 3); a : b = 3 : 4

(iii) P(2, 6); Q(– 4, 1); a : b = 1 : 2

रीत :

(i) (X_1, Y_1)=(-3 ,7) आणि $(X_2, Y_2) = (1, -4)$ मानू,

तसेच a : b = 2 : 1

∴ रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$X = \frac{ax_2 + nx_1}{a+b}$ आणि $y = \frac{ay_1 + by_2}{a+b}$

$\therefore x = \frac{2 \times 1 + 1 \times (-3)}{2+1}$ आणि $y = \frac{2 \times (-4) + 1 \times 7}{2+1}$

$\therefore x = \frac{2-3}{3}$ आणि $y = \frac{-8+7}{3}$

$\therefore x = -\frac{1}{3}$ आणि $y = -\frac{1}{3}$

A या बिंदूचे निर्देशक $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ आहेत.

(ii) (X_1, Y_1)=(-2 ,-5) आणि $(X_2, Y_2) = (4, 3)$ मानू,

तसेच a : b = 3 : 4

∴ रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$X = \frac{ax_2 + nx_1}{a+b}$ आणि $y = \frac{ay_1 + by_2}{a+b}$

$\therefore x = \frac{3 \times 4 + 4 \times (-2)}{3+4}$ आणि $y = \frac{3 \times 3 + 4 \times (-5)}{3+4}$

$\therefore x = \frac{12-8}{7}$ आणि $y = \frac{9-20}{7}$

$\therefore x = \frac{4}{7}$ आणि $y = -\frac{11}{7}$

A या बिंदूचे निर्देशक ($\frac{4}{7}$, $-$ $\frac{11}{7}$) आहेत.

(iii) (X_1, Y_1)=(2 ,6) आणि $(X_2, Y_2) = (-4, 1)$ मानू,

तसेच a : b = 1 : 2

रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$X = \frac{ax_2 + nx_1}{a+b}$ आणि $y = \frac{ay_1 + by_2}{a+b}$

$\therefore x = \frac{1 \times (-4) + 2 \times (2)}{1+2}$ आणि $y = \frac{1 \times 1 + 2 \times (6)}{1+2}$

$\therefore x = \frac{-4+4}{3}$ आणि $y = \frac{1+12}{3}$

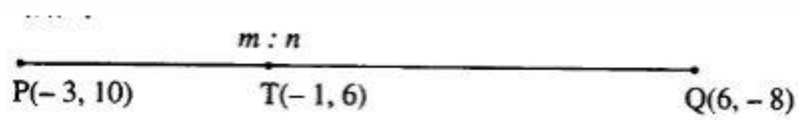
$\therefore x = \frac{0}{3}$ = ० आणि $y = \frac{13}{3}$

A या बिंदूचे निर्देशक ($0, \frac{13}{3}$) आहेत.

3. P-T-Q असून, बिंदू T(-1, 6) हा बिंदू P(– 3, 10) आणि बिंदू Q(6, – 8) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला कोणत्या गुणोत्तरात विभागतो?

उत्तर :

रीत :



समजा, बिंदू T हा रेख PQ ला m : n या गुणोत्तरात विभागतो.

मग, बिंदू A(X_1, Y_1)आणि B(X_2, Y_2) यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे m : n या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक

$(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_1 + ny_2}{m+n})$ असतात.

यावरून,

$$-1 = \frac{m \times 6 + n \times (-3)}{m+n} \quad \text{व} \quad 6 = \frac{m \times (-8) + n \times 10}{m+n}$$

$$\therefore\ -m - n = 6m - 3n \qquad \text{व} \qquad 6m + 6n = -8m + 10n - 6n$$

$$\therefore\ -7m = -2n \qquad \text{व} \qquad 14m = 4n$$

$$\therefore 7m = 2n \qquad \text{व} \qquad \frac{m}{n} = \frac{4}{14}$$

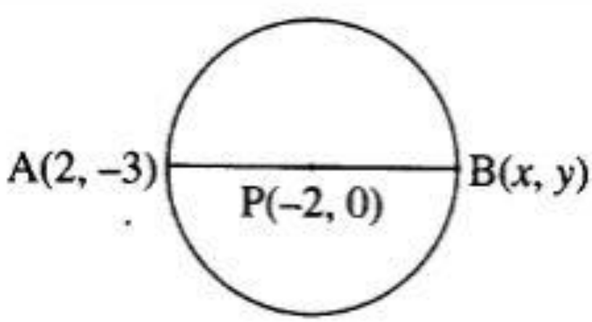
$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{2}{7} \qquad \text{व} \qquad \therefore \frac{m}{n} = \frac{2}{7}$$

x व y या निर्देशकांच्या किमती घालून गुणोत्तर सारखेच म्हणजे 2 : 7 येते.

बिंदू T हा बिंदू P व बिंदू Q यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला 2 : 7 या गुणोत्तरात विभागतो.

4. रेख AB हा वर्तुळाचा व्यास असून P हे केंद्र आहे. A(2, – 3) आणि P(- 2, 0) असल्यास B या बिंदूचे निर्देशक काढा.

उत्तर :



रीत : समजा, B या बिंदूचे निर्देशक (x, y) आहेत. रेख AB हा व्यास असून P हे केंद्र आहे. ______(1)

A-P-B.

P हा बिंदू रेख AB चा मध्यबिंदू आहे. ___ [(1) वरून]

∴ P हा बिंदू रेख AB ला 1 : 1 या गुणोत्तरात विभागतो.

(X_1, Y_1) आणि (X_2, Y_2) या दोन भिन्न बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ असतात.

रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

येथे, $-2 = \frac{2+x}{2}$ व $0 = \frac{-3+y}{2}$

∴ $-4 = 2 + x$ व $0 \times 2 = -3 + y$

∴ $-4 - 2 = x$ व $0 = -3 + y$

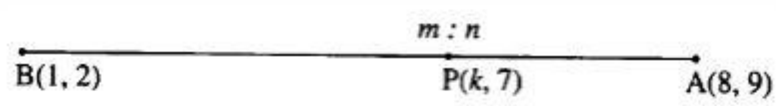
∴ $x = -6$ व $y = 3$

∴ x = - 6 व y = 3

B या बिंदूचे निर्देशक (– 6, 3) आहेत.

5. बिंदू A(8, 9) आणि B(1, 2) यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे P(k, 7) हा बिंदू कोणत्या गुणोत्तरात विभाजन करतो ते काढा आणि k ची किंमत काढा.

उत्तर :



रीत :

समजा, P बिंदू हा रेख BA चे m : n या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

$(X_1, Y_1) = (1,2)$आणि $(X_2, Y_2) = (8,9)$ व (x,y) = (k,7)

∴ रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$X = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ आणि $y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$

$\therefore k = \frac{m \times 8 + n \times (1)}{m+n}$ ___(1) आणि $7 = \frac{m \times 9 + n \times 2}{m+n}$

$\therefore k(m+n) = 8m + n$ आणि $7(m+n) = 9m + 2n$

$\therefore 7m + 7n = 9m + 2n$

$\therefore 7n - 2n = 9m - 7m$

$\therefore 5n = 2m$

$\therefore 2m = 5n$

$\therefore m = \frac{5}{2}n$ ____(2)

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{5}{2}$ ____(2)

(2) ची किंमत (1) मध्ये भरुन,

$k = \frac{5\times8+2\times1}{5+2} = \frac{40+2}{7} = \frac{42}{7}$

$\therefore k = 6$

रेख AB चे P हा बिंदू 2 : 5 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

k= 6 आहे.

6. (22, 20) आणि (0, 16) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.

रीत : समजा, (22,20) = (X_1, Y_1) ;(0,16) = (X_2, Y_2) आणि मध्यबिंदूचे निर्देशक (x , y) मानू.

रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$X = \frac{x_2 + x_1}{2}$ आणि $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

$X = \frac{20 + 0}{2}$ आणि $y = \frac{20 + 16}{2}$

$\therefore X = \frac{22}{2}$ आणि $y = \frac{36}{2}$

$\therefore X = 11$ आणि $y = 18$

(22, 20) आणि (0, 16) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक (11, 18) आहेत.

7. पुढे त्रिकोणाचे शिरोबिंदू दिलेले आहेत. प्रत्येक त्रिकोणाच्या मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक काढा :

(i) (- 7,6); (2, – 2); (8, 5).

(ii) (3, – 5); (4, 3); (11, - 4).

(iii) (4, 7); (8, 4); (7, 11).

रीत : शिरोबिंदू (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) असलेल्या त्रिकोणाच्या मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right.$, $\left.\frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}\right)$ असतात.

(i) (-7, 6); (2, - 2), (8, 5)

समजा, , $(X_1, Y_1) = (-7,6)$; $(X_2, Y_2) = (2, -2)$, $(X_3, Y_3) = (8, 5)$

$\therefore \frac{X_1+X_2+X_3}{3} = \frac{-7+2+8}{3} = \frac{3}{3} = 1$ व

$\frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3} = \frac{6-2+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$

मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक (1, 3) आहेत.

उत्तर : मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक (1, 3) आहेत.

(ii) (3, -5); (4, 3); (11, -4)

समजा, $(X_1, Y_1) = (3, -5)$; $(X_2, Y_2) = (4, 3), (X_3, Y_3) = (11, -4)$

$\therefore \frac{X_1+X_2+X_3}{3} = \frac{3+4+11}{3} = \frac{18}{3} = 6$ व

$\frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3} = \frac{-5+3-4}{3} = \frac{-6}{3} = -2$

मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक (6, -2) आहेत.

(iii) (4, 7); (8, 4); (7, 11)

समजा, $(X_1, Y_1) = (4, 7)$; $(X_2, Y_2) = (8, 4), (X_3, Y_3) = (7, 11)$

$\therefore \frac{X_1+X_2+X_3}{3} = \frac{4+8+7}{3} = \frac{19}{3}$ व

$\frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3} = \frac{7+4+11}{3} = \frac{22}{3}$

मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक $(\frac{19}{3}, \frac{22}{3})$आहेत.

8. Δ ABC चा G हा मध्यगा संपात आहे. A, B व G यांचे निर्देशक अनुक्रमे (-14, - 19); (3, 5); (-4, – 7) आहेत ; तर C बिंदूचे निर्देशक काढा.

रीत : शिरोबिंदू (X_1, Y_1) , $(X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ असलेल्या त्रिकोणाच्या मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक $(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}, \frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3})$ असतात.

C बिंदूचे निर्देशक (X_3, Y_3) , A बिंदूचे (X_1, Y_1), व B बिंदूचे (X_2, Y_2) मानू.

तसेच G(- 4, – 7) = (x, y) मानू.

$\therefore\ x = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ व $y = \frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}$

$\therefore\ -4 = \frac{-14+3+X_3}{3}$ व $-7 = \frac{-19+5+Y_3}{3}$

$\therefore\ -4\times 3 = -11 + X_3$ व $-7\times 3 = -14 + Y_3$

$\therefore\ -12 = -11 + X_3$ व $-21 = -14 + Y_3$

$\therefore\ -12 + 11 = X_3$ व $-21 + 14 = Y_3$

$\therefore\ X_3 = -1$ व $Y_3 = -7$

(X_3, Y_3) = (-1,-7)

C बिंदूचे निर्देशक (-1, - 7) आहेत.

9. मध्यगा संपात G(1, 5) असलेल्या त्रिकोणाचे A(h, -6); B(2, 3) आणि C(-6, k) शिरोबिंदू आहेत; तर h व k ची किंमत काढा.

रीत : शिरोबिंदू (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) असलेल्या त्रिकोणाच्या मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\ ,\ \frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}\right)$ असतात.

A(h, - 6) =(X_1, Y_1), B(2,3) = (X_2, Y_2)

C (- 6,k) = (X_3, Y_3) व G(1,5) = (x,y)

$\therefore\ x = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ व $y = \frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}$

$\therefore\ 1 = \frac{h+2-6}{3}$ व $5 = \frac{-6+3+k}{3}$

$\therefore\ 1 \times 3 = h - 4$ व $5 \times 3 = -3 + k$

$\therefore\ 3 + 4 = h$ व $15 + 3 = k$

$\therefore h = 7$ व $k = 18$

(h, k) = (7, 18)

उत्तर : h = 7 व k = 18 आहेत.

10. बिंदू A(2, 7) आणि B(-4, – 8) यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे त्रिभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक काढा.

रीत : रेषाखंडाचे जे दोन बिंदू त्या रेषाखंडाचे तीन समान भाग करतात, त्या बिंदूंना त्या रेषाखंडाचे त्रिभाजक बिंदू म्हणतात.

समजा, बिंदू P आणि Q हे बिंदू A आणि बिंदू B यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे त्रिभाजन बिंदू आहेत. म्हणजेच बिंदू P आणि Q मुळे रेख AB चे तीन समान भाग होतात.

बिंदू P रेख BA चे 1 : 2 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

समजा, $(X_1, Y_1) = (-4, -8); (X_2, Y_2) = (2, 7)$, व

$m: n = 1: 2, P = (x, y)$

मग, रेषाखंडाच्या विभाजन सूत्रानुसार,

$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ व $y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$

$\therefore x = \frac{1\times2+2\times(-4)}{1+2}$ व $y = \frac{1\times7+2\times(-8)}{1+2}$

$\therefore x = \frac{2-8}{3}$ व $y = \frac{7-16}{3}$

$\therefore x = \frac{-6}{3}$ व $y = \frac{-9}{3}$

$\therefore x = -2$ व $y = -3$

(x, y) = (– 2, – 3)

P या बिंदूचे निर्देशक (– 2, – 3) आहेत.

बिंदू Q हा रेख BA चे 2 : 1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

समजा, Q = (c, d)

मग, रेषाखंडाच्या विभाजन सूत्रानुसार,

$c = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ व $d = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$

$\therefore c = \frac{2\times2+1\times(-4)}{1+2}$ व $y = \frac{2\times7+1\times(-8)}{1+2}$

$\therefore c = \frac{4-4}{3}$ व $d = \frac{14-8}{3}$

$\therefore c = \frac{0}{3}$ व $\text{d} = \frac{6}{3}$

$\therefore c = 0$ व $\text{d} = 2$

(c, d)= (0,2)

उत्तर : रेख AB चे विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक अनुक्रमे (0, 2) व (-2, – 3) आहेत.

11. A(-14, - 10); B(6, - 2) असलेल्या रेख AB चे चार एकरूप रेषाखंडांत विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक काढा.

रीत : बिंदू P रेख AB ला 1 : 3 या गुणोत्तरात विभागतो.

समजा, $(X_1, Y_1) = (-14, -10); (X_2, Y_2) = (6, -2)$, व

$m : n = 1 : 3$, P बिंदूचे निर्देशक (x, y) मानू.

मग, रेषाखंडाच्या विभाजन सूत्रानुसार,

$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ व $y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$

$\therefore x = \frac{1\times6+3\times(-14)}{1+3}$ व $y = \frac{1\times(-2)+3\times(-10)}{1+3}$

$\therefore x = \frac{6-42}{4}$ व $y = \frac{-2-30}{4}$

$\therefore 4x = -36$ व $4y = -32$

$\therefore x = \frac{-36}{4}$ व $y = \frac{-32}{4}$

$\therefore x = -9$ व $y = -8$

(x,y) = (– 9, - 8)

P या बिंदूचे निर्देशक (-9, - 8) आहेत.

Q हा बिंदू रेख AB चा मध्यबिंदू आहे.

Q या बिंदूचे निर्देशक (c, d) मानू.

रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$\therefore\ c = \frac{X_1+X_2}{2}$ व $d = \frac{Y_1+Y_2}{2}$

$\therefore\ c = \frac{-14+6}{2}$ व $d = \frac{-10-2}{2}$

$\therefore\ c = \frac{-8}{2}$ व $d = \frac{-12}{2}$

$\therefore\ c = -4$ व $d = -6$

(c,d) = (- 4, -6)

Q या बिंदूचे निर्देशक (– 4, - 6) आहेत.

R हा बिंदू रेख QB चा मध्यबिंदू आहे.

R या बिंदूचे निर्देशक (e,f) मानू.

रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$\therefore\ e = \frac{\mathrm{c}+X_2}{2}$ व $f = \frac{d+Y_2}{2}$

$\therefore\ e = \frac{-4+6}{2}$ व $f = \frac{-6+(-2)}{2}$

$\therefore\ e = \frac{2}{2}$ व $f = \frac{-8}{2}$

$\therefore\ e = 1$ व $f = -4$

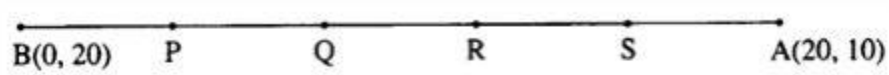
(e,f) = (1, -4)

R या बिंदूचे निर्देशक (1, – 4) आहेत.

उत्तर : रेख AB चे चार एकरूप रेषाखंडांत विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक अनुक्रमे (-9, - 8); (-4, -6) व (1, - 4) हे आहेत.

12. A(20, 10); B(0, 20) असलेल्या रेख AB चे पाच एकरूप रेषाखंडांत विभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

रीत :



आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे, रेख BP, रेख PQ, रेख QR, रेख RS व रेख SA हे पाच एकरूप रेषाखंड आहेत. B-P-Q-R-S-A.

बिंदू P हा रेख BA ला 1 : 4 या गुणोत्तरात विभागतो.

समजा, $(X_1, Y_1) = (0, 20); (X_2, Y_2) = (20, 10),$ व

$m : n = 1 : 4$, P बिंदूचे निर्देशक (x, y) मानू.

मग, रेषाखंडाच्या विभाजन सूत्रानुसार,

$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ व $y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$

$\therefore x = \frac{1\times20+4\times0}{1+4}$ व $y = \frac{1\times10+4\times20}{1+4}$

$\therefore x = \frac{20+0}{5}$ व $y = \frac{10+80}{5}$

$\therefore x = \frac{20}{5}$ व $y = \frac{90}{5}$

$\therefore x = 4$ व $y = 18$

(x, y) = (4, 18)

P या बिंदूचे निर्देशक (4, 18) आहेत.

बिंदू Q हा रेख BA ला 2 : 3 या गुणोत्तरात विभागतो.

Q या बिंदूचे निर्देशक (c, d) मानू व m : n = 2 : 3

रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$$\therefore\ c = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \quad \text{व} \quad d = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$$

$$\therefore\ c = \frac{2\times20+3\times0}{2+3} \quad \text{व} \quad d = \frac{2\times10+3\times20}{2+3}$$

$$\therefore\ c = \frac{40}{5} \quad \text{व} \quad d = \frac{20+60}{5}$$

$$\therefore\ c = 8 \quad \text{व} \quad d = 16$$

(c, d) = (8, 16)

Q या बिंदूचे निर्देशक (8, 16) आहेत.

बिंदू R हा रेख BA ला 3 : 2 या गुणोत्तरात विभागतो.

R या बिंदूचे निर्देशक (e , f) मानू व m : n = 3 : 2

$$\therefore\ e = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \quad \text{व} \quad f = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$$

$$\therefore\ e = \frac{3\times20+2\times0}{2+3} \quad \text{व} \quad f = \frac{3\times10+2\times20}{2+3}$$

$$\therefore\ e = \frac{60}{5} \quad \text{व} \quad f = \frac{30+40}{5}$$

$$\therefore\ e = \frac{60}{5} \quad \text{व} \quad f = \frac{70}{5}$$

$$\therefore\ e = 12 \quad \text{व} \quad f = 14$$

(e,f) = (12, 14)

R या बिंदूचे निर्देशक (12, 14) आहेत.

बिंदू S हा रेख BA ला 4 : 1 या गुणोत्तरात विभागतो.

S या बिंदूचे निर्देशक (g, h) मानू व m : n = 4 : 1

रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$\therefore\ g = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ व $= \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$

$\therefore\ g = \frac{4\times20+1\times0}{4+1}$ व $h = \frac{4\times10+1\times20}{4+1}$

$\therefore\ g = \frac{80}{5}$ व $h = \frac{40+20}{5}$

$\therefore\ g = \frac{80}{5}$ व $h = \frac{60}{5}$

$\therefore\ g = 16$ व $h = 12$

(g, h) = (16, 12)

s बिंदूचे निर्देशक (16, 12) आहेत.

उत्तर : रेख AB चे पाच एकरूप रेषाखंडांत विभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे P(4, 18); Q(8, 16); R(12, 14) व S(16, 12), हे आहेत.

सरावसंच 5.3

1. रेषांनी X-अक्षाच्या धन दिशेशी केलेले कोन दिले आहेत. त्यांवरून त्या रेषांचे चढ काढा :

(1) 45° (2) 60° (3) 90°.

उत्तर : रेषेने X-अक्षाच्या धन दिशेशी केलेल्या कोनाचे tan गुणोत्तर म्हणजे त्या रेषेचा चढ होय.

(1) $\theta = 45^\circ$ व $\tan 45^\circ = 1$. रेषेचा चढ 1 आहे.

(2) $\theta = 60^\circ$ व $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$. रेषेचा चढ $\sqrt{3}$ आहे.

(3) $\theta = 90^\circ$ व $\tan 90^\circ$ या रेषेचा चढ ठरवता येत नाही.

[टीप : शून्याने भागाकार करता येत नसल्यामुळे या रेषेचा चढ ठरवता येत नाही.]

2. पुढे दिलेल्या बिंदूंतून जाणाऱ्या रेषांचे चढ काढा :

(i) A(2, 3) आणि B(4, 7)

(ii) P(– 3, 1) आणि Q(5, - 2)

(iii) C (5, – 2) आणि D(7, 3)

(iv) L(– 2, – 3) आणि M(– 6, - 8)

(v) E(– 4, – 2) आणि F(6, 3)

(vi) T(0, -3) आणि S(0, 4).

रीत :

(i) A(2, 3) आणि B(4, 7)

समजा, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $y_1 = 3$, $y_2 = 7$

रेषा AB चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{7-3}{4-2}$

$= \frac{4}{2} = 2$

उत्तर : रेषा AB चा चढ = 2 आहे.

(ii) P(-3, 1) आणि Q(5, -2)

समजा, $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $y_1 = 1$, $y_2 = -2$

रेषा PQ चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{-2-1}{5-(-3)}$

$= \frac{-3}{5+3} = \frac{-3}{8}$

उत्तर : रेषा PQ चा चढ $= \frac{-3}{8}$ आहे.

(iii) C(5, – 2) आणि D(7, 3)

समजा, $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $y_1 = 1$, $y_2 = -2$

रेषा CD चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{3-(-2)}{7-5}$

$= \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$

उत्तर : रेषा CD चा चढ $= \frac{5}{2}$ आहे.

(iv) L(- 2, – 3) आणि M(– 6, - 8)

समजा, $x_1 = -2$, $x_2 = -6$, $y_1 = -3$, $y_2 = -8$

रेषा LM चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{-8-(-3)}{-6-(-2)}$

$= \frac{-8+3}{-6+2} = \frac{-5}{-4}$

$= \frac{5}{4}$

उत्तर : रेषा LM चा चढ $= \frac{5}{4}$ आहे.

(v) E(– 4, – 2) आणि F(6, 3)

समजा, $x_1 = -4$, $x_2 = 6$, $y_1 = -2$, $y_2 = 3$

रेषा EF चा चढ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{3-(-2)}{6-(-4)}$

$= \frac{3+2}{6+4} = \frac{5}{10}$

$= \frac{1}{2}$

उत्तर : रेषा EF चा चढ $= \frac{1}{2}$ आहे.

(vi) T(0, – 3) आणि S (0, 4)

समजा, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = -3$, $y_2 = 4$

रेषा TS चा चढ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{4-(-3)}{0-0}$

$= \frac{4+3}{0} = \frac{7}{0}$

$= \frac{7}{0}$

उत्तर : रेषा TS चा चढ ठरवता येणार नाही.

(टीप : जेव्हा छेदस्थानी शून्य असतो, तेव्हा चढ ठरवता येत नाही.)

3. पुढील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत, हे ठरवा :

(i) A(- 1, – 1); B (0, 1); C (1, 3).

(ii) D(– 2, – 3); E(1,0); F (2, 1).

(iii) L(2, 5); M (3, 3); N(5, 1).

(iv) P(2, -5); Q(1, - 3); R(-2, 3).

(v) R(1, – 4); S(– 2, 2); T(– 3, 4).

(vi) A(– 4, 4); K(- 2,\frac{5}{2}); N(4, - 2).

रीत :

(i) A(– 1, – 1); B(0, 1); C(1, 3)

रेषा AB चा चढ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-1)}{0-(-1)} = \frac{1+1}{1} = 2$

रेषा BC चा चढ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$

रेषा AB व रेषा BC चा चढ समान आहे.

∴ AB || BC. पण बिंदू B हा दोन्ही रेषांवर आहे.

∴ दोन्ही रेषा एकच आहेत.

उत्तर : बिंदू A, B, C हे एकरेषीय आहेत.

(ii) D(– 2, – 3); E(1, 0); F(2, 1)

रेषा DE चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-(-3)}{1-(-2)} = \frac{3}{1+2} = \frac{3}{3} = 1$

रेषा EF चा चढ $= = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-0}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$

रेषा DE व रेषा EF चा चढ समान आहे.

∴ DE || EF. पण बिंदू E दोन्ही रेषांवर आहे.

∴ दोन्ही रेषा एकच आहेत.

उत्तर : बिंदू D, E, F हे एकरेषीय आहेत.

(iii) L(2, 5); M(3, 3); N(5, 1)

रेषा LM चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-5}{3-2} = \frac{-2}{1} = -2$

रेषा MN चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-3}{5-3} = \frac{-2}{3}$

रेषा LM व रेषा MN चा चढ समान नाही.

∴ रेषा LM व रेषा MN या परस्परांना समांतर नाहीत.

उत्तर : बिंदू L, M, N हे एकरेषीय नाहीत.

(iv) P(2, – 5); Q(1, – 3); R(– 2, 3)

रेषा PQ चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3-(-5)}{1-2} = \frac{-3+5}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$

रेषा QR चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-(-3)}{-2-1} = \frac{3+3}{-3} = \frac{6}{-3} = -2$

रेषा PQ व रेषा QR चा चढ समान आहे.

∴ PQ || QR. पण बिंदू Q दोन्ही रेषांवर आहे.

∴ दोन्ही रेषा एकच आहेत.

उत्तर : बिंदू P, Q, R हे एकरेषीय आहेत.

(v) R(1, -4); S(– 2, 2); T(-3, 4)

रेषा RS चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-(-4)}{-2-1} = \frac{2+4}{-3} = \frac{6}{-3} = -2$

रेषा ST चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-2}{-3-(-2)} = \frac{2}{-3+2} = \frac{2}{-1} = -2$

रेषा RS व रेषा ST चा चढ समान आहे.

∴ RS || ST. पण बिंदू S दोन्ही रेषांवर आहे.

∴ दोन्ही रेषा एकच आहेत.

उत्तर : बिंदू R, S, T हे एकरेषीय आहेत.

(vi) A(– 4, 4); K(- 2,$\frac{5}{2}$); N(4, - 2)

रेषा AK चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{\frac{5}{2}-4}{-2-(-4)}$

$$= \frac{\frac{5-8}{2}}{-2+4}$$

$$= \frac{\frac{-3}{2}}{2}$$

$$= \frac{-3}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

रेषा KN चा चढ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{-2-\frac{5}{2}}{4-(-2)}$$

$$= \frac{\frac{-4-5}{2}}{4+2}$$

$$= \frac{\frac{-9}{2}}{6}$$

$$= \frac{-9}{2} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{-3}{4}$$

रेषा AK व रेषा KN चा चढ समान आहे.

∴ AK || KN. पण बिंदू K दोन्ही रेषांवर आहे.

∴ दोन्ही रेषा एकच आहेत.

उत्तर : बिंदू A, K, N हे एकरेषीय आहेत.

4. A(1, – 1); B(0, 4); C(-5, 3) हे त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत, तर प्रत्येक बाजूचा चढ काढा.

रीत :

रेषा AB चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{4-(-1)}{0-1}$

$= \frac{4+1}{-1}$

$= \frac{5}{-1}$

$= -5$

रेषा BC चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{3-4}{-5-0}$

$= \frac{-1}{-5}$

$= \frac{1}{5}$

रेषा AC चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{3-(-1)}{-5-1}$

$$= \frac{3+1}{-6}$$

$$= \frac{4}{-6}$$

$$= \frac{-2}{3}$$

उत्तर : बाजू AB चा चढ = – 5, बाजू BC चा चढ = $\frac{1}{5}$ आणि बाजू AC चा चढ = $\frac{-2}{3}$ आहे.

5. A(-4, – 7); B(-1, 2); C(8, 5) आणि D(5, – 4) हे ABCD या समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

सिद्धता :

रेषा AB चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$= \frac{2-(-7)}{-1-(-4)}$$

$$= \frac{2+7}{-1+4}$$

$$= \frac{9}{3}$$

$$= 3$$

रेषा BC चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$= \frac{5-2}{8-(-1)}$$

$$= \frac{3}{9}$$

$$= \frac{1}{3}$$

रेषा CD चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$= \frac{-4-5}{5-8}$$

$$= \frac{-9}{-3}$$

$$= 3$$

रेषा AD चा चढ $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$= \frac{-4-(-7)}{5-(-4)}$$

$$= \frac{-4+7}{5+4}$$

$$= \frac{3}{9}$$

$$= \frac{1}{3}$$

बाजू AB चा चढ = बाजू CD चा चढ

व बाजू AD चा चढ = बाजू BC चा चढ

■ABCD मध्ये संमुख बाजूचा चढ समान आहे. म्हणजेच संमुख बाजू समांतर आहेत.

∴ ■ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

A(– 4, – 7); B(– 1, 2); C(8, 5) आणि D(5, – 4) हे ABCD या समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत.

6. R(1, - 1) आणि S(-2, k) असून, RS या रेषेचा चढ - 2 असेल, तर k ची किंमत काढा.

रीत :

रेषा RS चा चढ = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{k-(-1)}{-2-1} = \frac{k+1}{-2-1} = \frac{k+1}{-3}$ ____1)

रेषा RS चा चढ -2 आहे. ___ (दिले आहे)___(2)

(1) व (2) वरून,

$\frac{k+1}{-3} = -2$

$\therefore k + 1 = (-2) \times (-3)$

$\therefore k + 1 = 6$ $\therefore k = 6 - 1$ $\therefore k = 5$

उत्तर : k = 5 आहे.

7. B(k, -5) आणि C(1, 2) या रेषेचा चढ 7 असेल, तर k ची किंमत काढा.

रीत :

रेषा BC चा चढ = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-(-5)}{1-k} = \frac{2+5}{1-k} = \frac{7}{1-k}$ ___(1)

रेषा BC चा चढ 7 आहे. ___(दिले आहे)___(2)

(1) व (2) वरून,

$\frac{7}{1-k} = 7$

$\therefore \frac{1}{1-k} = 7$ ___(दोन्ही बाजूंना 7 ने भागून)

$\therefore 1 = -k$

$\therefore 1 - 1 = -k$ $\therefore 0 = -k$ $\therefore k = 0$

उत्तर : k = 0 आहे.

8. P(2, 4); Q(3, 6); R(3, 1) आणि S(5, k) असून, रेषा PQ ही रेषा RS ला समांतर आहे, तर k ची किंमत काढा.

रीत : रेषा PQ ही रेषा RS ला समांतर आहे. ____(दिले आहे)

∴ रेषा PQ व रेषा RS यांचा चढ समान आहे. ___(1)

रेषा PO चा चढ = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{6-4}{3-2} = \frac{1}{2} = 2$ ___(2)

रेषा RS चा चढ= $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{k-1}{5-3} = \frac{k-1}{2}$ ___(3)

समांतर रेषाचे चढ समान असतात.

$\therefore 2 = \frac{k-1}{2}$ ____ (1), (2) व (3) वरून

$\therefore 2 \times 2 = k - 1$

$\therefore 4 = k - 1$

$\therefore 4 + 1 = k$

$\therefore k = 5$

उत्तर : k = 5 आहे.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. योग्य पर्याय निवडून रिकाम्या जागा भरा.

(1) रेख AB, हा Y-अक्षाला समांतर असून A बिंदूचे निर्देशक (1,3) आहेत तर, B बिंदूचे निर्देशक .... असू शकतील.

(A)(3,1) (B)(5,3) (C)(3,0) (D)(1,-3)

उत्तर : (D)(1,-3)

(2) खालीलपैकी .... हा बिंदू X- अक्षावर आरंभबिंदूच्या उजवीकडे आहे.

(A)(-2,0) (B)(0,2) (C)(2,3) (D)(2,0)

उत्तर : (D)(2,0)

(3) (-3,4) या बिंदूचे आरंभबिंदूपासून अंतर ...... आहे.

(A)7 (B) 1 (C) 5 (D)-5

उत्तर : (C) 5

(4) एका रेषेने X- अक्षाच्या धन दि शेशी 30° चा कोन केला आहे, म्हणून त्या

रेषेचा चढ .... आहे.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D)$\sqrt{3}$

उत्तर : (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत, ते ठरवा

(1) A (0,2) , B (1,-0.5), C (2,-3)

(2) P (1, 2) , Q (2,$\frac{8}{5}$), R(3,$\frac{6}{5}$)

(3) L (1,2) , M (5,3) , N (8,6)

रीत :

पद्धत 1

(1) A (0,2) , B (1,-0.5), C (2,-3)

अंतराच्या सूत्रावरुन,

$AB = \sqrt{(1-0)^2 + (-0.5-2)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-2.5)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (\frac{-5}{2})^2}$

$= \sqrt{1 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{29}{4}} \quad = \frac{\sqrt{29}}{2}$ ____(1)

$BC = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-(-0.5)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-2.5)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (\frac{-5}{2})^2}$

$= \sqrt{1 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$ ____(2)

$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-2)^2}$

$= \sqrt{(2)^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$ ____(3)

(1) (2) (3) वरून,

$\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\frac{\sqrt{29}}{2}$, व $\sqrt{29}$ यांपैकी $\sqrt{29}$ ही सर्वात मोठी संख्या आहे.

$$\sqrt{29} = \frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\therefore AC = AB + BC$$

बिंदू A, B, C एकरेषीय आहेत.

<u>पद्धत 2 :</u>

रेषा AB चा चढ $= \frac{-0.5-2}{1-0}$

$= \frac{-2.5}{1}$

$= -2.5$

रेषा BC चा चढ $= \frac{-3-(-0.5)}{2-1}$

$= \frac{-3+0.5}{1}$

$= -2.5$

बाजू AB चा चढ = बाजू BC चा चढ

रेषा AB ∥ रेषा BC

$\therefore$ बिंदू B हा दोन्ही रेषांवर आहे.

$\therefore$ रेषा AB व रेषा BC एकच आहेत.

बिंदू A, B, C एकरेषीय आहेत.

(2) P (1, 2) , Q $(2, \frac{8}{5})$, R$(3, \frac{6}{5})$

पद्धत 2 :

रेषा PQ चा चढ $= \frac{\frac{8}{5}-2}{2-1}$

$= \frac{\frac{8-10}{5}}{1}$

$= \frac{-2}{5}$ ______(1)

रेषा QR चा चढ $= \frac{\frac{6}{5}-\frac{8}{5}}{3-2}$

$= \frac{\frac{-2}{5}}{1}$

$= \frac{-2}{5}$ ______(2)

बाजू PQ चा चढ = बाजू QR चा चढ

रेषा PQ ∥ रेषा QR

∴ बिंदू Q हा दोन्ही रेषांवर आहे.

∴ रेषा PQ व रेषा QR एकच आहेत.

बिंदू P, Q, R एकरेषीय आहेत.

(3) L (1,2) , M (5,3) , N (8,6)

रेषा LM चा चढ $= \frac{3-2}{5-1}$

$= \frac{1}{4}$ ______ (1)

रेषा MN चा चढ $= \frac{6-3}{8-5}$

$= \frac{3}{3}$ ______ (2)

बाजू PQ चा चढ = बाजू QR चा चढ

रेषा PQ ∥ रेषा QR

∴ बिंदू Q हा दोन्ही रेषांवर आहे.

∴ रेषा PQ व रेषा QR एकच आहेत.

बिंदू P, Q, R एकरेषीय आहेत.

3. P (0,6) आणि Q (12,20) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.

उत्तर : समजा, P आणि Q यांना जोडणार्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक (x,y) आहेत.

मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$\therefore\ x = \frac{0+12}{2}$ व $y = \frac{6+20}{2}$

$\therefore\ x = \frac{12}{2}$ व $y = \frac{26}{2}$

$\therefore\ x = 6$ व $y = 13$

मध्यबिंदूचे निर्देशक (6,13) आहेत.

4. A (3,8) आणि B (-9,3) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला Y- अक्ष कोणत्या गुणोत्तरात विभाजित करतो ?

उत्तर : समजा, A (3,8)= (x_1, y_1) व B (-9,3) =(x_2 , y_2)

समजा, Y अक्षावरील P(0,K) या बिंदूत रेख AB चे विभाजन m : n या गुणोत्तरत झाले.

रेषाखंडाच्या विभाजन सूत्रानुसार,

$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

$\therefore 0 = \frac{m\times(-9)+n\times(3)}{m+n}$

$\therefore 0 = -9m + 3n$

$\therefore 9m = 3n$

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{3}{9}$

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$

रेषाखंडाला Y- अक्ष 1:3 या गुणोत्तरात विभाजित करतो.

5. X-अक्षावरील असा बिंदू शोधा की जो P(2,-5) आणि Q(-2,9) पासून समदूर असेल.

उत्तर : समजा, X-अक्षावरील M (x,0) हा P(2,-5) आणि Q(-2,9) या बिंदूपासून समदूर आहे.

अंतराच्या सूत्रानुसार, PM=QM

$\therefore\ PM^2 = QM^2$

$\therefore\ (x-2)^2+[0-(-5)]^2 = [x-(-2)]^2+(0-9)^2$

$\therefore\ (x-2)^2+(5)^2 = (x+2)^2+(-9)^2$

$\therefore\ x^2 - 4x + 4 + 25 = x^2 + 4x + 4 + 81$

$\therefore\ -4x + 29 = 4x + 85$

$\therefore 29 - 85 = 4x + 4x$

$\therefore 8x = -56$

$\therefore x = \frac{-56}{8}$

$\therefore x = -7$

M या बिंदूचे निर्देशक (-7,0) आहेत.

X-अक्षावरील M (-7,0) हा P(2,-5) आणि Q(-2,9) या बिंदूपासून समदूर आहे.

6. खालील बिंदूंतील अंतरे काढा.

(1) A (a, 0), B (0, a)

(2) P (-6, -3), Q (-1, 9)

(3) R (-3a, a), S (a, -2a)

(1) A (a, 0), B (0, a)

समजा, A (a, 0) =(X_1, Y_1) आणि $B\ (0, a)\ = (X_2, Y_2)$ मानू,

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$d(A, B) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$

$= \sqrt{(0 - a)^2 + (a - 0)^2}$

= $\sqrt{(-a)^2 + (a)^2}$

$= \sqrt{a^2 + a^2}$

= $\sqrt{2a^2}$

= $\sqrt{2a}$

उत्तर : बिंदू A व B मधील अंतर $\sqrt{2a}$ आहे.

(2) P (-6, -3), Q (-1, 9)

समजा, P (-6, -3) =(X_1, Y_1) आणि Q $(-1, 9)$ = (X_2, Y_2) मानू,

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$$d(P, Q) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1-(-6))^2 + (9-(-3))^2}$$

$$= \sqrt{(-1+6)^2 + (9+3)^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 144}$$

$$=\sqrt{169}$$

= 13

उत्तर : बिंदू P व Q मधील अंतर 13 आहे.

(3) R (-3a, a), S (a, -2a)

समजा, R (-3a, a) =(X_1, Y_1) आणि S $(a, -2a)$ = (X_2, Y_2) मानू,

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$d(R,S) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$

$= \sqrt{(a - (-3a))^2 + (-2a - a)^2}$

= $\sqrt{(a + 3a)^2 + (-3a)^2}$

$= \sqrt{(4a)^2 + (-3a)^2}$

= $\sqrt{16a^2 + 9a^2}$

=$\sqrt{25a^2}$

= $5a$

उत्तर : बिंदू R व S मधील अंतर $5a$ आहे.

7. एका त्रिकोणाचे शिरोबिंदू A (-3,1), B (0,-2) आणि C (1,3) आहेत, तर त्या त्रिकोणाच्या परिकेंद्राचे निर्देशक काढा.

उत्तर : A (-3,1), B (0,-2) आणि C (1,3) हे $\triangle ABC$ चे शिरोबिंदू आहेत. व समजा P(a,b) हा बिंदू $\triangle ABC$ चे परिकेंद्र आहे.

$\therefore P$ हाबिंदू A, B, C पासून समदूर आहे.

$\therefore\ PA = PB = PC$

$\therefore\ PA^2 = PB^2 = PC^2$ ____ (1)

$\therefore\ PA^2 = PB^2$

$\therefore [\mathrm{a} - (-3)]^2 + (b-1)^2 = (a-0)^2 + [b-(-2)]^2$

$\therefore\ (\mathrm{a}+3)^2 + (b-1)^2 = (a)^2 + (b+2)^2$

$\therefore\ a^2 + 6a + 9 + b^2 - 2b + 1 = a^2 + b^2 + 4b + 4$

$\therefore\ 6\mathrm{a} - 2\mathrm{b} + 10 = 4\mathrm{b} + 4$

$\therefore\ 6\mathrm{a} - 2\mathrm{b} - 4\mathrm{b} + 10 = 4 - 10$

$\therefore\ 6\mathrm{a} - 6\mathrm{b} = -6$

$\therefore 2\mathrm{a} - 2\mathrm{b} = -6$

$\therefore \mathrm{a} - \mathrm{b} = -1$ ____(*दोन्ही बाजूंना ६ ने भागून*)____(2)

तसेच, $PA^2 = PC^2$ __(1)*वरुन*

$\therefore [\mathrm{a} - (-3)]^2 + (b-1)^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2$

$\therefore (\mathrm{a}+3)^2 + (b-1)^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2$

$\therefore\ a^2 + 6a + 9 + b^2 - 2b + 1 = a^2 - 2a + 1 + b^2 - 6b + 9$

$\therefore 6\mathrm{a} - 2\mathrm{b} + 10 = -2\mathrm{a} - 6\mathrm{b} + 10$

$\therefore 6\mathrm{a} + 2\mathrm{a} - 2\mathrm{b} + 6\mathrm{b} = 0$

$\therefore 8\mathrm{a} + 4\mathrm{b} = 0$

$\therefore 2\mathrm{a} + \mathrm{b} = 0$ ____(*दोन्ही बाजूंना 4 ने भागून*)__(3)

$\therefore \mathrm{a} - \mathrm{b} = -1$ __ (2)

$2a + b = 0$ ______ (3)

$3a \quad = -1$ ___(2) व (3) ची बेरीज करून

$\therefore \; a = -\frac{1}{3}$

$a = -\frac{1}{3}$ ही किंमत समीकरण (2)मध्ये भरुन

$-\frac{1}{3} - b = -1 \qquad \therefore \; -b = -1 + \frac{1}{3}$

$\therefore \; -b = -\frac{2}{3}$

$\therefore \; b = \frac{2}{3}$

परिकेंद्राचे निर्देशक $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

8. खालील बिंदूंना जोडणारे रेषाखंड त्रिकोण तयार करू शकतील का? त्रिकोण तयार झाल्यास त्याचा बाजूंवरून होणारा प्रकार सांगा.

(1) L (6,4) , M (-5,-3) , N (-6,8)

(2) P (-2,-6) , Q (-4,-2), R (-5,0)

(3) A $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ B $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$

(1) L (6,4) , M (-5,-3) , N (-6,8)

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$LM = \sqrt{(-5-6)^2 + (-3-4)^2}$

$= \sqrt{(-11)^2 + (-7)^2}$

$= \sqrt{121 + 49}$

$= \sqrt{170}$ ______$(\sqrt{170} \approx 13.03)$___(1)

$MN = \sqrt{[-6 - (-5)]^2 + [8 - (-3)]^2}$

$= \sqrt{(-6 + 5)^2 + (8 + 3)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (11)^2}$

$= \sqrt{1 + 121}$

$= \sqrt{122}$ ______$(\sqrt{122} \approx 11.04)$___(2)

$LN = \sqrt{(-6 - 6)^2 + (8 - 4)^2}$

$= \sqrt{(-12)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{144 + 16}$

$= \sqrt{160}$ ______$(\sqrt{160} \approx 12.64)$___(3)

(1) (2) (3) वरुन,

$LM + MN > LN, \quad LM + LN > MN$ व $LN + MN > LM$

L (6,4) , M (-5,-3) , N (-6,8) याबिंदूना जोडणारे रेषाखंडत्रिकोण तयार करु शकतात. कारण त्रिकोणात कोणत्याही दोन बाजूंच्या लांबींची बेरीजतिसर्या बाजूच्या लांबीपेक्षा जास्त असते. तयार होणारा त्रिकोण विषमभुज त्रिकोण असेल कारणतिन्ही बाजूंची लांबी असमान आहे.

(2) P (-2,-6) , Q (-4,-2), R (-5,0)

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$PQ = \sqrt{[-4-(-2)]^2 + [-2-(-6)]^2}$

$= \sqrt{(-4+2)^2 + (-2+6)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{4+16}$

$= \sqrt{20}$ _____($\sqrt{20} \approx 4.47$)___(1)

$QR = \sqrt{[-5-(-4)]^2 + [0-(-2)]^2}$

$= \sqrt{(-5+4)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{1+4}$

$= \sqrt{5}$ ____$(\sqrt{5} \approx 2.24)$__(2)

$PR = \sqrt{[-5-(-2)]^2 + [0-(-6)]^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (6)^2}$

$= \sqrt{9+36}$

$= \sqrt{45}$ ____$(\sqrt{45} \approx 6.71)$__(3)

(1) (2) (3) वरुन,

$PQ + QR < PR, \quad PQ + PR > QR$ व $PR + QR > PQ$

P (-2,-6) , Q (-4,-2), R (-5,0) या बिंदूना जोडणारे रेषाखंड त्रिकोण तयार करु शकत नाही . कारण त्रिकोणात कोणत्याही दोन बाजूंच्या लांबींची बेरीज तिसर्या बाजूच्या लांबीपेक्षा जास्त असते.

9. जर P (-12,-3) आणि Q (4, k) या बिंदूंतून जाणाऱ्या रेषेचा चढ असेल, तर k ची किंमत काढा.

रीत : समजा, P (-12,-3) = (X_1, Y_1) आणि Q $(4, k) = (X_2, Y_2)$

चढाच्या सूत्रानुसार,

M = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore M = \frac{K-(-3)}{4-(-12)}$

$= \frac{K+3}{4+12}$

$= \frac{K+3}{16}$ _____(1)

परंतु दिलेल्या रेषेचा चढ $\frac{1}{2}$ आहे.

$\therefore \frac{K+3}{16} = \frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{K} + 3 = 16 \times \frac{1}{2}$

$\therefore K + 3 = 8$

$\therefore K = 8 - 3$

$\therefore K = 5$

उत्तर : k = 5 आहे.

10. A(4, 8) आणि B(5, 5) या बिंदूंना जोडणारी रेषा, C(2,4) आणि D(1,7) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेला समांतर आहे हे दाखवा.

उत्तर :

A (X_1, Y_1) आणि $B(X_2, Y_2)$ मानू

$\therefore\ X_1 = 4, Y_1 = 8\ ,\ X_2 = 5,\ Y_2 = 5$

रेषा AB चा चढ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{5-8}{5-4}$

$= \frac{-3}{1}$

$= -3$ ___(1)

C (X_3, Y_3) आणि $D(X_4, Y_4)$ मानू-

$\therefore\ X_3 = 2, Y_3 = -4\ ,\ X_4 = 1,\ Y_4 = 7$

रेषा CD चा चढ $= \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$

$= \frac{7-4}{1-2}$

$= \frac{3}{-1}$

$= -3$ ___(2)

(1) व (2) वरून,

रेषा AB चा चढ = रेषा CD चा चढ

∴ रेषा AB || रेषा CD ____ (समान चढ असणाऱ्या रेषा परस्परांना समांतर असतात.)

11. P(1,-2), Q(5,2), R(3,-1), S(-1,-5) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

उत्तर :

रेख PQचा चढ = $\frac{2-(-2)}{5-1} = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ ____ (1)

रेख QR चा चढ = $\frac{-1-2}{3-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ ____ (2)

रेख RS चा चढ = $\frac{-5-(-1)}{-1-3} = \frac{-5+1}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$ ____ (3)

रेख PS चा चढ = $\frac{-5-(-2)}{-1-1} = \frac{-5+2}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ ____ (4)

(1), (2), (3) व (4) वरून,

रेख PQ चा चढ = रेख RS चा चढ व रेख QR चा चढ = रेख PS चा चढ

∴ रेख PQ || रेख RS व रेख QR || रेख PS.

■ PORS च्या संमुख बाजू समांतर आहेत.

∴ ■ PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

P(1, – 2); Q(5,2); R(3, – 1); S(– 1, – 5) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत.

12. जर P(2,1), Q(-1,3), R(-5,-3) आणि S(-2,-5) तर □ PQRS हा आयत आहे हे दाखवा.

उत्तर :

सिद्धता : जेव्हा चौकोनाच्या संमुख बाजू समान लांबींच्या आणि कर्ण समान लांबीचे असतात, तेव्हा तो चौकोन आयत असतो.

∴ संमुख बाजूंची लांबी व कर्णांची लांबी अंतराच्या सूत्रावरून काढू.

$$PQ = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{9+4}$$

$$= \sqrt{13} \qquad \text{____ (1)}$$

$$QR = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + (-3-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{16+36}$$

$$= \sqrt{52} \qquad = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13} \qquad ____ \ (2)$$

$$RS = \sqrt{[-2-(-5)]^2 + [-5-(-3)]^2}$$

$$= \sqrt{(-2+5)^2 + (-5+3)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{9+4}$$

$$= \sqrt{13} \qquad ____ \ (3)$$

$$PS = \sqrt{(-2-2)^2 + (-5-1)^{2}{}^{2}}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{16+36}$$

$$= \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13} \qquad ____ \ (4)$$

$$PR = \sqrt{(-5-2)^2 + (-3-1)^{2}{}^{2}}$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{49+16}$$

$= \sqrt{65}$ ____ (5)

$QS = \sqrt{[-2-(-1)]^2 + [-5-3]^2}$

$= \sqrt{(-2+1)^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{1+64}$

$= \sqrt{65}$ ____ (6)

(1), (2), (3) व (4) वरून,

PQ = RS व QR = PS

तसेच (5) व (6) वरून,

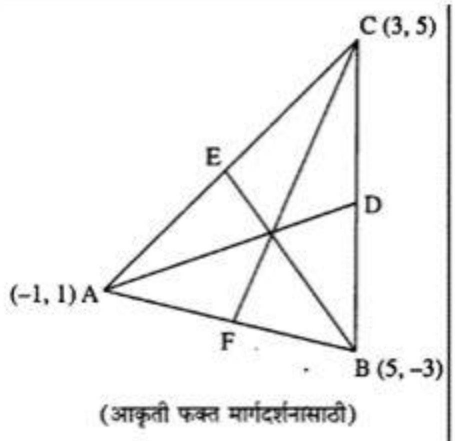
PR = Qs

यावरून असे दिसते की, चौकोनाच्या संमुख बाजूंची लांबी समान आहे व दोन्ही कर्णांची लांबी समान आहे.

∴ ■ PQRS हा आयत आहे.

13. A(-1, 1); B(5, - 3) आणि C(3, 5) हे शिरोबिंदू असलेल्या त्रिकोणाच्या मध्यगांच्या लांबी काढा.

रीत : समजा,



A(-1, 1) = (X_1, Y_1)

B $(5, -3) = (X_2, Y_2)$

C(3 , 5) =(X_3, Y_3)

Δ ABC मध्ये,

शिरोबिंदू A मधून रेख AD, शिरोबिंदू B मधून रेख BE व शिरोबिंदू C मधून रेख CF या मध्यगा आहेत.

बाजू AB च्या मध्यबिंदू F चे निर्देशक = $(\frac{X_1+X_2}{2}, \frac{Y_1+Y_2}{2})$

$= (\frac{-1+5}{2}, \frac{1-3}{2}) = (\frac{4}{2}, \frac{-2}{2})$= (2 , -1)

∴ F(2, − 1) व C(3, 5) या बिंदूतून जाणाऱ्या CF मध्यगेची लांबी

$= \sqrt{(3-2)^2 + [5-(-1)]^2}$ ____(अंतराच्या सूत्रावरून)

$= \sqrt{(1)^2 + [5+1]^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + [6]^2}$

$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$

बाजू BC च्या मध्यबिंदू d चे निर्देशक

$(\frac{X_2+X_3}{2} \ , \frac{Y_2+Y_3}{2})$

$= (\frac{5+3}{2}, \frac{-3+5}{2}) = (\frac{8}{2}, \frac{2}{2}) = (4\ ,\ 1)$

D(4, 1) व A(– 1, 1) या बिंदूंतून जाणाऱ्या AD मध्यगेची लांबी

$= \sqrt{(-1-4)^2 + (1-1)^2}$ ____(अंतराच्या सूत्रावरून)

$= \sqrt{(-5)^2 + [0]^2}$

$= \sqrt{25+0} = \sqrt{25} = 5$

बाजू AC च्या मध्यबिंदू E चे निर्देशक

$(\frac{X_1+X_3}{2} \ , \frac{Y_1+Y_3}{2})$

$= (\frac{-1+3}{2}, \frac{1+5}{2}) = (\frac{2}{2}, \frac{6}{2}) = (1, 3)$

E(1,3) व B(5, – 3) या बिंदूतून जाणाऱ्या BE मध्यगेची लांबी

$= \sqrt{(5-1)^2 + (-3-3)^2}$ ____(अंतराच्या सूत्रावरून)

$= \sqrt{(4)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$

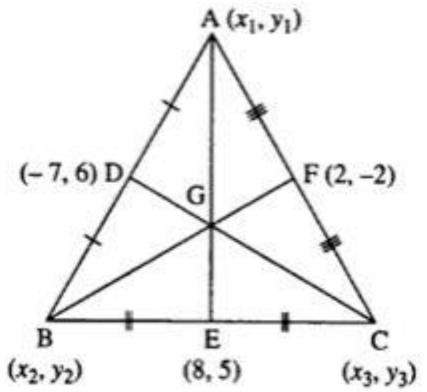
उत्तर : (− 1, 1); (5, − 3) आणि (3, 5) हे शिरोबिंदू असलेल्या त्रिकोणाच्या मध्यगांची लांबी अनुक्रमे 5, $2\sqrt{13}$ व $\sqrt{37}$ आहे.

14. जर D(-7, 6); E (8, 5) आणि F(2, − 2) हे त्रिकोणाच्या बाजूंचे मध्यबिंदू असतील, तर त्या त्रिकोणाच्या मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक काढा.

रीत :

समजा,

Δ ABC चे A (X_1, Y_1) , B (X_2, Y_2) , C(X_3, Y_3) हे शिरोबिंदू आहेत.



(आकृती फक्त मार्गदर्शनासाठी)

बाजू AB, बाजू BC व बाजू AC चे अनुक्रमे D(– 7, 6); E(8, 5) आणि F(2, – 2) हे मध्यबिंदू आहेत.

बाजू AB च्या मध्यबिंदू d चे निर्देशक

$(\frac{X_1+X_2}{2} \quad , \frac{Y_1+Y_2}{2})$

$\therefore (-7 , 6)=(\frac{X_1+X_2}{2} \quad , \frac{Y_1+Y_2}{2})$

$\frac{X_1+X_2}{2} = -7$ व $\frac{Y_1+Y_2}{2} = 6$

$X_1 + X_2 = -14$ ____ (1)

व $Y_1 + Y_2 = 12$ ____ (2)

बाजू BC च्या मध्यबिंदू E चे निर्देशक = $(\frac{X_2+X_3}{2} \quad , \frac{Y_2+Y_3}{2})$

$\therefore (8 , 5)=(\frac{X_2+X_3}{2} \quad , \frac{Y_2+Y_3}{2})$

$\frac{X_2+X_3}{2} = 8$ व $\frac{Y_2+Y_3}{2} = 5$

$X_2 + X_3 = 16$ ____ (3)

व $Y_2 + Y_3 = 10$ ____ (4)

बाजू AC च्या मध्यबिंदू F चे निर्देशक = $(\frac{X_1+X_3}{2} , \frac{Y_1+Y_3}{2})$

$\therefore (2, -2) = (\frac{X_1+X_3}{2} , \frac{Y_1+Y_3}{2})$

$\frac{X_1+X_3}{2} = 2$ व $\frac{Y_1+Y_3}{2} = -2$

$X_1 + X_3 = 4$ ____ (5)

व $Y_1 + Y_3 = -4$ ____ (6)

समीकरण 1 मधून समीकरण 3 वजा करुन,

$X_1 + X_2 = -14$ ____ (1)

$X_2 + X_3 = 16$ ____ (3)

$-$ $-$ $-$

$X_1 - X_3 = -30$

$X_1 - X_3 = -30$ ____ (7)

समीकरण 5 व समीकरण 7 ची बेरीज करुन,

$X_1 + X_3 = 4$ ____ (5)

$+X_1 - X_3 = -30$ ____ (7)

$2X_1 = -26$

$\therefore X_1 = \frac{-26}{2} = -13$

समीकरण 2 मधून समीकरण 4 वजा करून,

$Y_1 + Y_2 = 12$ ____ (2)

$-Y_2 + Y_3 = 10$ ____ (4)

$-\quad -\quad -$

$Y_1 - Y_3 = 2$ ____ (8)

समीकरण 6 व समीकरण 8 ची बेरीज करून,

$Y_1 + Y_3 = -4$ ____ (6)

$+ Y_1 - Y_3 = 2$ ____ (8)

$2Y_1 = -2$

$\therefore Y_1 = \frac{-2}{2} = -1$

$\therefore (X_1 \quad Y_1) = (-13, -1)$

A बिंदूचे निर्देशक $(-13, -1)$ आहेत.

G बिंदूचे निर्देशक (x, y) मानू.

रेख AD चा G हा मध्यगा संपातबिंदू आहे.

रेख AD ला Gबिंदू 2 : 1 या गुणोत्तरात विभागतो.

A $(-13,-1) = (X_1, Y_1)$

D(8, 5) = (X_4, Y_4) व m:n = 2 : 1

$\therefore G$ चा X निर्देशक $= \frac{mx_4 + nx_1}{m+n}$

$= \frac{2\times8+1\times(-1)}{2+1}$

$= \frac{16-13}{3}$

$= \frac{3}{3} = 1$

व G चा Y निर्देशक $= \frac{my_4 + ny_1}{m+n}$

$= \frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}$

$= \frac{10-1}{3}$

$= \frac{9}{3} = 3$

G या मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक (1,3) आहेत.

उत्तर : त्रिकोणाच्या मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक (1,3) आहेत.

15. A(4, - 1); B(6, 0); C(7,- 2) आणि D(5,-3) हे चौरसाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

सिद्धता : जेव्हा चौकोनाच्या सर्व बाजू समान लांबीच्या आणि कर्ण समान लांबीचे असतात, तेव्हा तो चौकोन चौरस असतो. सर्व बाजूंची लांबी व कर्णाची लांबी अंतराच्या सूत्रावरून काढू.

$$AB = \sqrt{(6-4)^2 + [0-(-1)]^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \qquad \text{____(1)}$$

$$BC = \sqrt{(7-6)^2 + (-2-0)^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \qquad \text{____(2)}$$

$$CD = \sqrt{(5-7)^2 + [-3-(-2)]^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \qquad \text{____(3)}$$

$$AD = \sqrt{(5-4)^2 + [-3-(-1)]^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \qquad \text{____(4)}$$

(1), (2), (3) व (4) वरून

$$AB = BC = CD = AD \qquad \text{____(5)}$$

$$AC = \sqrt{(4-7)^2 + (0-1)^2}$$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ ____(6)

BD $= \sqrt{(5-6)^2 + (-3-0)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ ____(7)

(5) व (6) वरून, AC = BD. ____ (8)

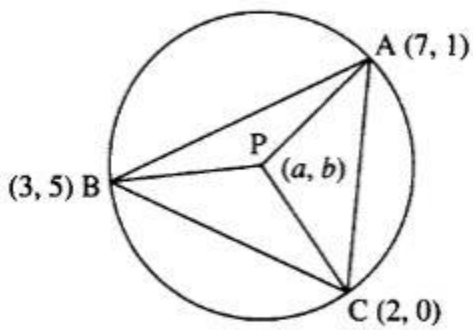
∴ चौकोनाच्या चारही बाजूंची लांबी समान आहे. ____[6 व 8 वरून]

दोन्ही कर्ण AC व BD ची लांबी समान आहे.

∴ A(4, – 1); B(6, 0); C(7, - 2) आणि D(5, - 3) हे चौरसाचे शिरोबिंदू आहेत.

16. A(7, 1); B(3, 5) आणि C(2, 0) शिरोबिंदू असलेल्या त्रिकोणाच्या परिवर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक आणि परिवर्तुळाची त्रिज्या काढा.

रीत : समजा, P(a, b) हा बिंदू Δ ABC चे परिकेंद्र आहे.



(आकृती फक्त मार्गदर्शनासाठी)

∴ P हा बिंदू A, B व C पासून समदूर आहे.

∴ $PA^2 = PB^2 = PC^2$ ____(1)

∴ $PA^2 = PB^2$ ____(1) वरुन

$(a-7)^2 + (b-1)^2 = (a-3)^2 + (b-5)^2$

∴ $a^2 - 14a + 49 + b^2 - 2b + 1 = a^2 - 6a + 9 + b^2 - 10b + 25$

$-14a - 2b + 50 = -6a - 10b + 34$

∴ $-14a + 6a - 2b + 10b = 34 - 50$

∴ $8a + 8b = -16$

∴ $a - b = 2$ ___(दोन्ही बाजूंना - 8 ने भागून)___(1)

तसेच, $PA^2 = PC^2$

$(a-7)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-0)^2$

∴ $a^2 - 14a + 49 + b^2 - 2b + 1 = a^2 - 4a + 4 + b^2$

$-14a - 2b + 50 = -4a + 4$

∴ $-14a + 4a - 2b = 4 - 50$

$\therefore -10 - 2b = -46$

$5a + b = 23$ ___ (दोन्ही बाजूंना -2 ने भागून) ___(2)

समीकरण (1) व (2) ची बेरीज करू.

$a - b = 2$ ___ (1)

$5a + b = 23$ ___ (2)

$6a = 25$

$a = \frac{25}{6}$ ही किंमत समीकरण (1) मध्ये भरू.

$a - b = 2$

$\therefore \frac{25}{6} - b = 2$

$\therefore b = \frac{25}{6} - 2 = \frac{25-12}{6}$

$\therefore b = \frac{13}{6}$

परिकेंद्राचे निर्देशक $(\frac{25}{6}, \frac{13}{6})$ आहेत.

$P(\frac{25}{6}, \frac{13}{6})$ व $A(7,1)$

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$PA = \sqrt{(7 - \frac{25}{6})^2} = \sqrt{(\frac{42-25}{6})^2 + (\frac{6-13}{6})^2}$

$= \sqrt{(\frac{17}{6})^2 + \left(\frac{-7}{6}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{289}{36} + \frac{49}{36}}$

$= \sqrt{\frac{338}{36}}$

$= \sqrt{\frac{13 \times 13 \times 2}{6 \times 6}} = \frac{13\sqrt{2}}{6}$

उत्तर : परिवर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक$\left(\frac{25}{6}, \frac{13}{6}\right)$ आहेत.

परिवर्तुळाची त्रिज्या $\frac{13\sqrt{2}}{6}$ आहे.

17. जर A(4,-3) आणि B(8,5), तर रेख AB चे 3:1 या गुणोत्तरात वि भाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्दे शक काढा.

रीत : समजा, A(4, - 3) = (X_1, Y_1) B(8,5) = (X_2, Y_2) ; व

m : n = 3 : 1

Q हा बिंदू रेख AB चे 3 : 1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो असे मानू.

मग, Q चा x निर्देशक $= \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

$= \frac{3 \times 8 + 1 \times 4}{3+1} = \frac{24+4}{4} = \frac{28}{4} = 7$

Q चा Y निर्देशक $= \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$

$= \frac{3 \times 5 + 1 \times (-3)}{3+1} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$

∴ Q या बिंदूचे निर्देशक (7, 3) आहेत.

उत्तर : रेख AB चे 3 : 1 या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक (7, 3) आहेत.

18. A(-4, -2), B(-3, -7) C(3, -2) आणि D(2, 3) हे बिं दू क्रमाने जोडले तर तयार होणाऱ्या ABCD या चौकोनाचा प्रकार लिहा.

रीत :

रेषा AB चा चढ $= \frac{-7-(-2)}{-3-(-4)} = \frac{-7+2}{-3+4} = \frac{-5}{1} = -5$

रेषा BC चा चढ $= \frac{-2-(-7)}{3-(-3)} = \frac{-2+7}{3+3} = \frac{5}{6}$

रेषा CD चा चढ $= \frac{3-(-2)}{2-3} = \frac{5}{-1} = -5$

रेषा AD चा चढ $= \frac{3-(-2)}{2-(-4)} = \frac{3+2}{2+4} = \frac{5}{6}$

यावरून, ■ ABCD च्या संमुख बाजूंचा चढ समान आहे.

∴ ■ABCD मध्ये संमुख बाजू समांतर आहेत. ___ (1)

$AC = \sqrt{[3-(-4)]^2 + [2-(-2)]^2}$

$= \sqrt{(3+4)^2 + (2-2)^2}$

$= \sqrt{7^2 + 0^2}$

$= \sqrt{7^2}$

$BD = \sqrt{[2-(-3)]^2 + [3-(-7)]^2}$

$= \sqrt{(5)^2 + (10)^2}$

$= \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125}$

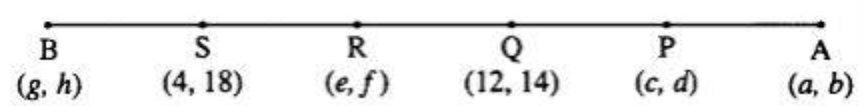
$\therefore AC \neq BD$

■ ABCD चे कर्ण असमान लांबीचे आहेत. ____ (2)

(1) व (2) वरून, ■ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

उत्तर : ■ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

19. रेख AB वरील बिंदू P, Q, R व S यांच्यामुळे त्या रेषाखंडाचे पाच एकरूप भाग होतात. जर A-P-Q – R-S-B आणि Q(12, 14), S(4, 18) ; तर A, P, R आणि B चे निर्देशक काढा.



उत्तर : A-P-Q-R-S-B

AP = PQ = QR = RS = SB ___(दिले आहे)___(1)

A, P, R व B या बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे (a, b) , (c, d) , (e ,f) व (g, h) मानू.

QR = RS ____ [(1) वरून]

∴ बिंदू R हा रेख QS चा मध्यबिंदू आहे.

∴ मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$e = \frac{12+4}{2} = \frac{16}{2} = 8$ व $F = \frac{14+18}{2} = \frac{32}{2} = 16$

∴ R या बिंदूचे निर्देशक (8, 16) आहेत ___(2)

त्याचप्रमाणे बिंदू S हा रेख RB चा मध्यबिंदू आहे. ___ [(1) वरून]

मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$4 = \frac{8+g}{2}$

$8 = 8 + g$

$\therefore g = 0$

व $18 = \frac{16+h}{2}$

$36 = 16 + h$

$\therefore h = 20$

∴ B या बिंदूचे निर्देशक (0, 20) आहेत ___ (3)

बिंदू Q हा रेख PR चा मध्यबिंदू आहे. ___ [(1) वरून]

मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$12 = \frac{c+8}{2}$

$\therefore\ 24 = c + 8$

$\therefore c = 16$

व $14 = \frac{d+16}{2}$

$\therefore\ 28 = d + 16$

$\therefore d = 12$ ___(4)

तसेच, बिंदू P हा रेख AQ चा मध्यबिंदू आहे. ___ [(1) वरून]

मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$16 = \frac{a+12}{2}$

$\therefore\ 32 = a + 12$

$\therefore a = 20$

व $12 = \frac{b+14}{2}$

$\therefore\ 24 = b + 14$

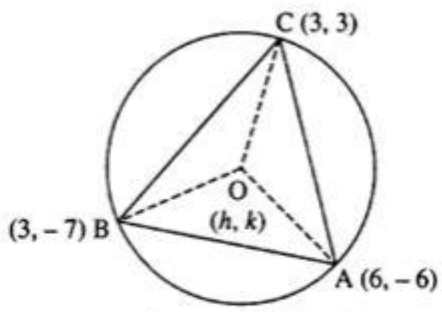
$\therefore b = 10$

A या बिंदूचे निर्देशक (20, 10) आहेत.

उत्तर : बिंदू A, P, R व B चे निर्देशक अनुक्रमे (20, 10) , (16, 12) , (8, 16) व (0, 20) आहेत.

20. P(6, – 6); Q(3, - 7) आणि R(3, 3) यांतून जाणाऱ्या वर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक काढा.

रीत : समजा, A(6, – 6); B(3, – 7) आणि C(3, 3) या बिंदूतून जाणाऱ्या वर्तुळाचे केंद्र O आहे. O या बिंदूचे निर्देशक (h, k) मानू.



(आकृती फक्त मार्गदर्शनासाठी)

OA = OB = OC ____(एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

$\therefore\ OA^2 = OB^2 = OC^2$ ___(1)

$\therefore\ OA^2 = OB^2$

$\therefore\ (6 - h)^2 + (-6 - k)^2 = (3 - h)^2 + (-7 - k)^2$

___(अंतराच्या सूत्रावरून)

$\therefore 36 - 12h + h^2 + 36 + 12k + k^2 = 9 - 6h + h^2 + 49 + 14k + k^2$

$\therefore 72 - 12h + 12k = 58 - 6h + 14k$ ___$(h^2 + k^2)$ चा बेरीज लोप

$\therefore 72 - 58 = -6h + 14k + 12h - 12k$

$\therefore 14 = 6h + 2k$

$\therefore 7 = 3h + k$ ____(दोन्ही बाजूंना 2 ने भागून)

3h + k = 7 ___(2)

तसेच $OB^2 = OC^2$ ____(1) वरून

$(3 - h)^2 + (-7 - k)^2 = (3 - h)^2 + (3 - k)^2$

___(अंतराच्या सूत्रावरून)

$\therefore 9 - 6h + h^2 + 49 + 14k + k^2 = 9 - 6h + h^2 + 9 - 6k + k^4$

$\therefore 58 - 6h + 14k = 18 - 6h - 6k$ ___$(h^2 + k^2)$ चा बेरीज लोप

$\therefore 58 - 18 = -6h - 6k + 6h + 14k$

$\therefore 40 = -20k$

$\therefore -20k = 40$

$\therefore k = \frac{40}{-20} = -2$

k = – 2 ही किंमत समीकरण (2) मध्ये भरून,

$7 = 3h - 2$

$\therefore 7 + 2 = 3h$

$\therefore 3h = 9$

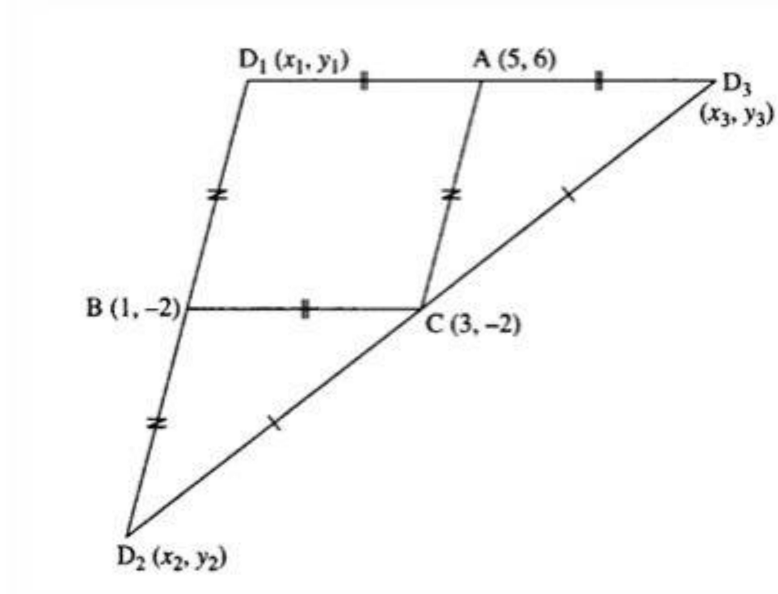
$\therefore h = 3$

$\therefore (h, k) = (3 - 2)$

उत्तर : वर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक (3, - 2) आहेत.

21. समांतरभुज चौकोनाच्या तीन शिरोबिंदूंचे निर्देशक A(5, 6); B(1, – 2) आणि C(3, – 2) असतील, तर चौथ्या बिंदूच्या निर्देशकांच्या शक्य त्या सर्व जोड्या काढा.

रीत :



■ ACBD चे A, B, C हे तीन शिरोबिंदू आकृतीत पाहा.

चौथा शिरोबिंदू D हा आकृतीत दर्शवल्याप्रमाणे $D_1, D_2,$ व D_3 या तीन पर्यायांमध्ये बसू शकतो.

त्यामुळे पर्याय (1) : ■ AD_1BC

पर्याय (2) : ■ABD_2C व

पर्याय (3) : ■ ABCD_3 हे तीन समांतरभुज चौकोन मिळतात.
समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

∴ प्रत्येक पर्यायामध्ये कर्णाचा छेदनबिंदू हाच त्यांचा मध्यबिंदू असेल.

पर्याय (1):

वरील गुणधर्मानुसार, ■ AD_1BC मध्ये, कर्ण CD_1 च्या मध्यबिंदूचे निर्देशक = कर्ण AB च्या मध्यबिंदूचे निर्देशक.

$\frac{x_{1+}3}{2} = \frac{5+1}{2}$ व $\frac{y_1-2}{2} = \frac{6-2}{2}$

$\therefore$ $x_{1+}3 = 6$ व $y_1 - 2 = 4$

$\therefore$ $x_1 = 3$ व $y_1 = 6$

$\therefore$ $D_1(x_1, y_1)$= (3,6)

पर्याय (2):

■ABD_2C मध्ये, कर्ण AD_2 व कर्ण BC च्या मध्यबिंदूचे निर्देशक

$\frac{x_{2+}5}{2} = \frac{3+1}{2}$ व $\frac{y_2+6}{2} = \frac{6-2}{2}$

$\therefore$ $x_2 + 5 = 4$ व $y_2 + 6 = -4$

$\therefore$ $x_2 = -1$ व $y_2 = -10$

$\therefore$ $D_2(x_2, y_2)$= (-1,-10)

पर्याय (3) :

■ ABCD_3 मध्ये, कर्ण AC व कर्ण \ ABCD_3 च्या मध्यबिंदूचे निर्देशक

$\frac{1+x_3}{2} = \frac{5+3}{2}$ व $\frac{-2+y_3}{2} = \frac{6-2}{2}$

$\therefore$ $1 + x_3 = 8$ व $-2 + y_3 = 4$

$\therefore$ $x_3 = 7$ व $y_3 = 6$

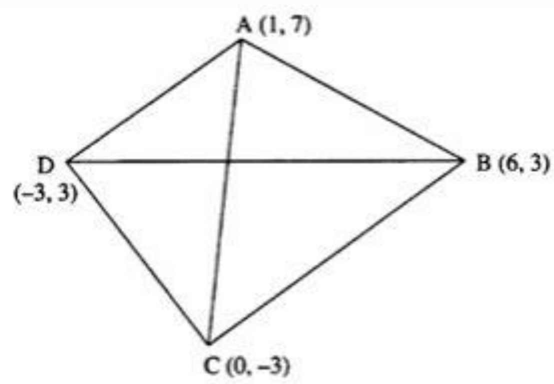
$\therefore\ D_2(x_3,\ y_3)\ =\ (7,6)$

उत्तर : चौथ्या शिरोबिंदूचे शक्य ते निर्देशक

(3, 6); (– 1, - 10) व (7,6).

22. A(1, 7); B(6, 3); C(0, – 3) आणि D(– 3, 3) हे शिरोबिंदू असलेला एक चौकोन आहे. त्या चौकोनाच्या प्रत्येक कर्णाचा चढ काढा.

रीत : आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे बिंदू A, B, C व D हे ■ ABCD चे शिरोबिंदू आहेत.



चढाच्या सूत्रावरून

कर्ण AC चा चढ $= \frac{7-(-3)}{1-0} = \frac{7+3}{1} = 10$

कर्ण BD चा चढ $= \frac{3-3}{6-(-3)} = \frac{0}{6+3} = \frac{0}{9} = 0$

कर्ण BD चा चढ शून्य आहे. याचा अर्थ BD हा X-अक्षाला समांतर आहे.

उत्तर : कर्ण AC चा चढ 10 आहे व कर्ण BD चा चढ 0 आहे.