6. त्रिकोणमिती

1. जर $\sin\theta = \frac{7}{25}$ तर $\cos\theta$ व $\tan\,\theta$ च्या किमती काढा.

रीत : $\sin\theta = \frac{7}{25}$ ____(दिले आहे)

$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

$\therefore (\frac{7}{25})^2 + cos^2\theta = 1$

$\therefore \frac{49}{625} + cos^2\theta = 1$

$\therefore cos^2\theta = 1 - \frac{49}{625}$

$\therefore cos^2\theta = \frac{625 - 49}{625}$

$\therefore cos^2\theta = \frac{576}{625}$

$\therefore \cos\theta = \frac{24}{25}$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

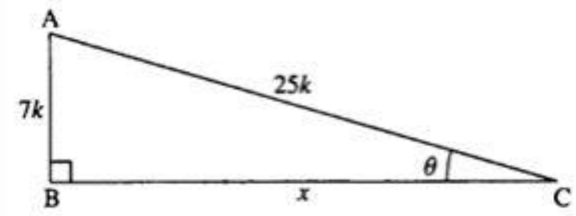
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore \tan\theta = \frac{7}{25} \div \frac{24}{25}$

$= \frac{7}{25} \times \frac{25}{24}$

$\therefore \tan\theta = \frac{7}{24}$

रीत II : आकृतीवरून,



$\sin\theta = \frac{7}{25}$

∴ AB = 7k, AC = 25k व BC = x मानू.

Δ ABC मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore\ 7k^2 + x^2 = 25k^2$

$\therefore\ 49k^2 + x^2 = 625k^2$

$\therefore\ x^2 = 625k^2 - 49k^2$

$\therefore\ x^2 = 576k^2$

x = 24k   ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\therefore \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{24k}{25k} = \frac{24}{25}$

$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{7k}{24k} = \frac{7}{24}$

$\therefore \cos\theta = \frac{24}{25} \quad \tan\theta = \frac{7}{24}$

उत्तर : $\cos\theta = \frac{24}{25}$, $\tan\theta = \frac{7}{24}$ आहे.

2. जर $\tan\theta = \frac{3}{4}$ तर $\sec\theta$ व $\cos\theta$ च्या किमती काढा. .

रीत I : $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ____(दिले आहे)

$\therefore 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore 1 + (\frac{3}{4})^2 = \sec^2\theta$

$\therefore 1 + \frac{9}{16} = \sec^2\theta$

$\therefore \frac{16+9}{25} = \sec^2\theta$

$\therefore \sec^2\theta = \frac{25}{16}$

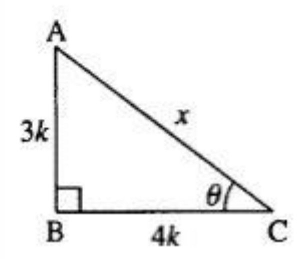
$\therefore \sec^2\theta = \frac{5}{4}$ ___(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\frac{5}{4}}$

$\therefore \cos\theta = \frac{4}{5}$

रीत II :



आकृतीवरून, $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

∴ AB = 3k, BC = 4k व AC =x मानू.

Δ ABC मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore\ 3k^2 + 4k^2 = x^2$

$\therefore 9k^2 + 16k^2 = x^2$

$\therefore\ x^2 = 25k^2$

∴ x = 5k ____ (दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\therefore \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$

$\therefore\ \sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4}$

उत्तर : $\sec\theta = \frac{5}{4}$ व $\cos\theta = \frac{4}{5}$ आहे.

3. जर $\cot\theta = \frac{40}{9}$ तर $\operatorname{cosec}\theta$ व $\sin\theta$ च्या किमती काढा.

रीत I : $\cot\theta = \frac{40}{9}$ ___ (दिले आहे.)

$1 + cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

$1 + (\frac{40}{9})^2 = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\therefore 1 + \frac{1600}{81} = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\therefore\ \frac{81+1600}{81} = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\therefore\ \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1681}{81}$

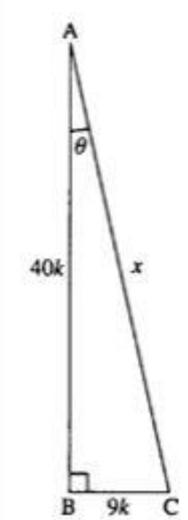
$\therefore\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{41}{9}$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$

$\sin\theta = \frac{1}{\frac{41}{9}}$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{9}{41}$

रीत II :



आकृतीवरून, $\cot\theta = \frac{40}{9}$

∴ BC = 9k, AB = 40k व AC = x मानू.

Δ ABC मध्ये,

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

Δ ABC मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore\ (40k)^2 + (9k)^2 = x^2$

$\therefore\ 1600k^2 + 81k^2 = x^2$

$\therefore\ x^2 = 1681k^2$

∴ x = 41k ____ (दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

AC= 41k

$\therefore\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{41k}{9k} = \frac{41}{9}$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{9k}{41k} = \frac{9}{41}$

उत्तर : $\operatorname{cosec}\theta = \frac{41}{9}$ व $\sin\theta = \frac{9}{41}$ आहे.

4. जर $5\sec\theta - 12\ \operatorname{cosec}\theta = 0$ असेल तर $\sec\theta$, $\cos\theta$ व $\sin\theta$ किमती शोधा.

रीत : $5\sec\theta - 12\ \operatorname{cosec}\theta = 0$ ___(दिले आहे)

$\therefore\ 5\ \sec\theta = 12\ \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore\ 5 \times \frac{1}{\cos\theta} = 12 \times \frac{1}{\sin\theta}$

____($\because\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ व $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$)

$\therefore\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{12}{5}$

$1 + tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore 1 + (\frac{12}{5})^2 = \sec^2\theta$

$\therefore 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$

$\therefore\ \frac{25+144}{25} = \sec^2\theta$

$\therefore\ \sec^2\theta = \frac{169}{25}$

$\therefore\ \sec\theta = \frac{13}{5}$ _____ (दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{\frac{13}{5}}$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{5}{13}$

$\therefore\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore\ \sin^2\theta + (\frac{5}{13})^2 = 1$

$\therefore\ \sin^2\theta + \frac{25}{169} = 1$

$\therefore\ \sin^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$

$\therefore\ \sin^2\theta = \frac{169-25}{169}$

$\therefore\ \sin^2\theta = \frac{144}{169}$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{12}{13}$

उत्तर : $\sec\theta = \frac{13}{5}$, $\cos\theta = \frac{5}{13}$ व $\sin\theta = \frac{12}{13}$

5. जर $\tan\theta = 1$, तर $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta}$ ची किंमत काढा.

रीत : $\tan\theta = 1$ ____(दिले आहे)

व $\theta = 45°$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sec 45° = \sqrt{2}$, $\operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{\sin 45°+\cos 45°}{\sec 45°+\operatorname{cosec} 45°}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{2\times\sqrt{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{2}$$

6.सिद्ध करा :

(i) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

सिद्धता:

डावी बाजू = $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1}$

$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{\cos\theta}$ ____ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= \sec\theta$ ____ $(\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta})$

= उजवी बाजू

$$\therefore \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$$

(ii) $\cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta) = 1$

सिद्धता:

डावी बाजू $= \cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

$= \cos^2\theta\left(1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$ ____ $(\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta})$

$= \cos^2\theta + \cos^2\theta \times \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 1$ ____ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

= उजवी बाजू

$\therefore \cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta) = 1$

(iii) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

सिद्धता:

डावी बाजू $= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \times \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$ ____ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ ____(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \sec\theta - \tan\theta$

= उजवी बाजू

$$\therefore \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$$

(iv) $(\sec\theta - \cos\theta)\ (\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta . \sec\theta$

सिद्धता :

डावी बाजू $= (\sec\theta - \cos\theta)\ (\cot\theta + \tan\theta)$

$= (\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta)(\cot\theta + \frac{1}{\cot\theta})$

___($\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ व $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$)

$= (\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta})(\frac{\cot^2\theta+1}{\cot\theta})$

$= (\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta})(\frac{cosec^2\theta}{\cot\theta})$

____ ($\because \sec^2\theta + \cos^2\theta = 1$ व $1 + \cot^2\theta = cosec^2\theta$)

$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin^2\theta} \times \tan\theta$

____ ($\because cosec^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$ व $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$)

$= \frac{1}{\cos\theta} \times \tan\theta$

$= \tan\theta . \sec\theta$ ___($\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$)

= उजवी बाजू

$$\therefore\ (\sec\theta - \cos\theta)\ \ (\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta\,.\sec\theta$$

(v) $\cot\theta + \tan\theta = cosec\ \theta.\sec\theta$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \cot\theta + \tan\theta$

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

___$(\because \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ व $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta})$

$= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta.\cos\theta}$ ____ $(\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= \frac{1}{\sin\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}$

$= cosec\ \theta.\sec\theta$

___$(\because \frac{1}{\sin\theta} = cosec\ \theta$ व $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta\ )$

= उजवी बाजू

(vi) $\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\ \theta}{\cos\ \theta}}$$

$$___\left(\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\ \text{व}\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \times \frac{(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta + \cos\theta.\sin\theta}{\cos^2\theta} \qquad ____ (\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos\theta.\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \sec\theta + \tan\theta$$

= उजवी बाजू

(vii) $\sec^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

सिद्धता :

[टीप : वरील उदाहरणात पुढील बदल करून ते सोडवावे :

$\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

डावी बाजू $= \sin^4\theta - \cos^4\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$

$___(a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2))$

$= (1)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$ $____ (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= \sin^2\theta - \cos^2\theta$

$= (1 - \cos^2\theta) - \cos^2\theta$ $____ (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= 1 - 2\cos^2\theta$

= उजवी बाजू

$\therefore \sec^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(viii) $\sec\theta + \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

सिद्धता :

उजवी बाजू $= \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \times \dfrac{(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)}$

$= \dfrac{\cos\theta + \cos\theta . \sin\theta}{\cos^2\theta}$ $____ (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= \dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{\cos\theta . \sin\theta}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \sec\theta + \tan\theta$

$__(\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$ व $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta)$

= डावी बाजू.

$\therefore \sec\theta + \tan\theta = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(ix) जर $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 2$ तर दाखवा की $\tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$

सिद्धता : $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 2$

$\therefore (\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta})^2 = 2^2$ __(दोन्ही बाजूचा वर्ग करून)

$\therefore \tan^2\theta + 2.\tan\theta \times \frac{1}{\tan\theta} + \frac{1}{\tan^2\theta} = 4$

$\therefore \tan^2\theta + 2 + \frac{1}{\tan^2\theta} = 4$

$\therefore \tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$

(x) $\frac{\tan A}{(1+\tan^2 A)} + \frac{\cot A}{(1+\cot^2 A)} = \sin A . \cos A$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \frac{\tan A}{(1+\tan^2 A)} + \frac{\cot A}{(1+\cot^2 A)}$

$= \frac{\tan A}{(sec^2 A)^2} + \frac{\cot A}{(\operatorname{cosec}^2 A)^2}$

____$[(1+\tan^2 A) = sec^2 A,\ \because 1+\cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A]$

$= \dfrac{\tan A}{sec^4 A} + \dfrac{\cot A}{\operatorname{cosec}^4 A}$

$= \tan A \times \cos^4 A + \cot A \times \sin^4 A$

___$(\because \frac{1}{\sec A} = \cos A\ ;\ \frac{1}{cosec\ A} = \sin A)$

$= \dfrac{\sin A}{\cos A} \times cos^4 A + \dfrac{\cos A}{\sin A} \times \sin^4 A$

___$(\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\ ;\ \cot A = \frac{\cos A}{\sin A})$

$= \sin A . \cos^3 A + \cos A . \sin^3 A$

$= \sin A . \cos^3 A + \cos A . \sin^3 A$

$= \sin A . \cos A\ (\sin^2 A + \cos^2 A)$

$= \sin A . \cos A\ (1)$ ____ $(\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$

$= \sin A . \cos A$

= उजवी बाजू

$\therefore \dfrac{\tan A}{(1+\tan^2 A)} + \dfrac{\cot A}{(1+\cot^2 A)} = \sin A . \cos A$

(xi) $sec^4 A\,(1 - sec^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

सिद्धता :

डावी बाजू $= sec^4 A\,(1 - sec^4 A) - 2\tan^2 A$

$$= \frac{1}{\cos^4 A}(1+\sin^2 A)(1-\sin^2 A) - \frac{2.\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

___$(\because \sec A = \frac{1}{\cos A}, a^4 - b^4 = (a^2+b^2)(a^2-b^2) \because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A})$

$$= \frac{(1+\sin^2 A)\cos^2 A}{\cos^4 A} - \frac{2.\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

_____ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$$= \frac{1+\sin^2 A}{\cos^2 A} - \frac{2.\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1+\sin^2 A - 2.\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$$ _____ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

=1

= उजवी बाजू.

$\therefore\ sec^4 A(1 - sec^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(xii) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1}$

$$= \frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} \times \frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta + 1}$$

$$= \frac{\tan\theta(\sec\theta + 1)}{\sec^2\theta - 1}$$

$$= \frac{\tan\theta(\sec\theta + 1)}{1 + \tan^2\theta - 1}$$

$$= \frac{\tan\theta(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta}$$

$$= \frac{\sec\theta + 1}{\tan\theta}$$

$$\therefore \frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} = \frac{\sec\theta + 1}{\tan\theta}$$

समान गुणोत्तराच्या सिद्धांतानुसार,

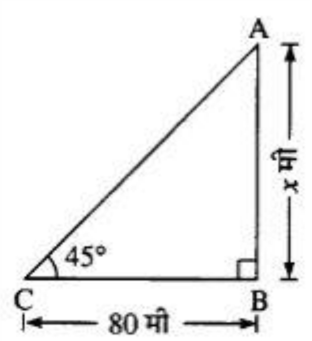
प्रत्येक गणोत्तर $= \dfrac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\sec\theta - 1 + \tan\theta}$ = उजवी बाजू.

$$\therefore \frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$$

सरावसंच 6.2

1. एक व्यक्ती एका चर्चपासून 80 मी अंतरावर उभी आहे. त्या व्यक्तीने चर्चच्या छताकडे पाहिले असता 45° मापाचा उन्नत कोन होतो; तर चर्चची उंची किती?

रीत : समजा, आकृतीत AB ही चर्चची उंची आहे व C या ठिकाणी व्यक्ती उभी आहे.



AB = x मीटर मानू.

CB = 80 मी

< ACB हा उन्नत कोन असून, $\theta = 45°$

आता, काटकोन △ ABC मध्ये,

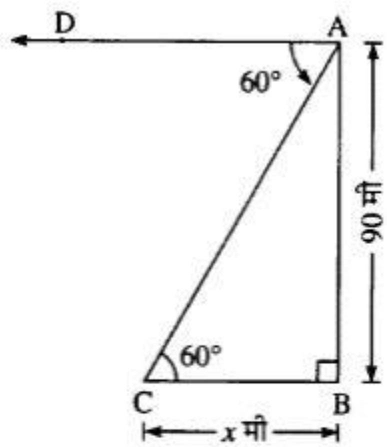
< ACB = tan 45° $= \frac{AB}{BC}$

$\therefore 1 = \frac{AB}{80}$

$\therefore AB = 80$ मीटर

उत्तर : चर्चची उंची 80 मीटर आहे.

2. दीपगृहावरून एका जहाजाकडे पाहताना 60° मापाचा अवनत कोन होतो. जर दीपगृहाची उंची 90 मी असेल, तर ते जहाज दीपगृहापासून किती अंतरावर आहे ? ($\sqrt{3}$ = 1.73)



रीत : समजा, आकृतीत AB हे दीपगृह असून, C या ठिकाणी जहाज आहे.

BC हे दीपगृहापासून जहाजाचे अंतर आहे.

दीपगृहावरून जहाजाकडे पाहताना

< DAC हा अवनत कोन होतो.

< DAC = 60°

AB = 90 मी

BC = x मी मानू.

$< DAC = < ACB$ ___(व्युत्क्रम कोन)

$\therefore < ACB = 60^\circ$

$\triangle ACB$ या काटकोन त्रिकोणात,

$< ACB = 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

$\therefore \sqrt{3} = \frac{90}{x}$

$\therefore x = \frac{90}{\sqrt{3}} = \frac{90}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\therefore x = \frac{90\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3}$

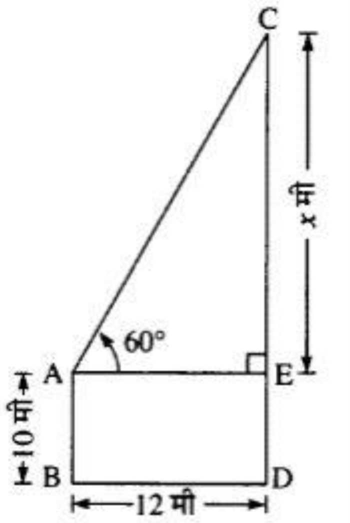
$\therefore x = 30 \times 1.73$

$= 51.9$ मीटर

उत्तर : जहाजाचे दीपगृहापासूनचे अंतर 51.9 मीटर आहे.

3. 12 मी रुंदीच्या रस्त्याच्या दुतर्फा समोरासमोर दोन इमारती आहेत. त्यांपैकी एकीची उंची 10 मी असून, तिच्या छतावरून दुसरीच्या छताकडे पाहिले असता उन्नत कोन 60° मापाचा होतो, तर दुसऱ्या इमारतीची उंची किती ?

रीत : समजा, रेख AB व रेख CD या त्या दोन इमारती आहेत.



AB = 10 मी.

रस्त्याची रुंदी = BD

∴ BD = 12 मी.

येथे, उन्नत कोन < EAC आहे.

< EAC = 60°

■ ABDE हा आयत आहे.

AE = BD = 12 मी ___(1)

व AB = ED = 10 मी ____(2)

समजा, CE = x मी

आता, △ AEC या काटकोन त्रिकोणात,

< EAC = tan 60° $= \frac{CE}{AE}$

$\therefore\ \sqrt{3} = \frac{x}{12}$

$\therefore x = 12\sqrt{3}$

$\therefore$ CE = $12\sqrt{3}$ मी

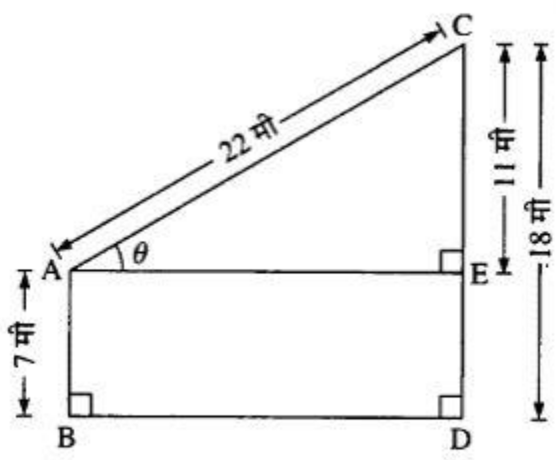
दुसऱ्या इमारतीची उंची = CE + ED

= $12\sqrt{3} + 10$

= $(12\sqrt{3} + 10)$ मी

उत्तर : दुसऱ्या इमारतीची उंची $(10 + 12\sqrt{3})$ मीटर आहे.

4. 18 मी व 7 मी उंचीचे खांब जमिनीवर उभे आहेत. त्यांच्या वरच्या टोकांना जोडणाऱ्या तारेची लांबी 22 मी आहे; तर त्या तारेने क्षितिजसमांतर पातळीशी केलेल्या कोनाचे माप काढा.



रीत : आकृतीत, रेख AB हा 7 मीटर उंचीचा व रेख CD हा 18 मीटर उंचीचा असे दोन खांब आहेत.

रेख AC हे खांबांच्या वरच्या टोकांतील अंतर आहे.

AC = 22 मीटर.

रेख AE ⊥ रेख CD काढा. C-E-D ___(रचना)

∴ ■ ABDE हा आयत आहे.

AB = DE ____(आयताच्या संमुख बाजू)

∴ DE = 7 मीटर. CD = CE + ED (C-E-D)

∴ 18 = CE +7

∴ CE = 18 - 7 = 11 मीटर

△ CAE या काटकोन त्रिकोणात,

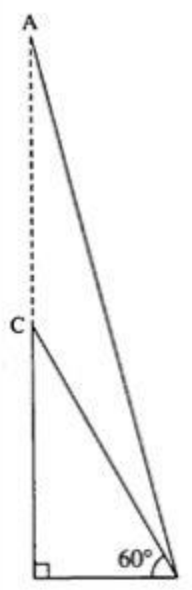
$< \sin CAE = \frac{CE}{CA} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$

$\therefore \sin < CAE = \frac{1}{2}$;

परंतु $\sin 30 = \frac{1}{2}$ $\therefore < CAE = 30^\circ$

उत्तर : तारेने क्षितिजसमांतर पातळीशी केलेला कोन 30° आहे.

5. वादळामुळे एक झाड मोडले आणि मोडल्यामुळे झाडाचा शेंडा जमिनीवर टेकला व मोडलेला भाग जमिनीशी 60° चा कोन करतो. झाडाचा शेंडा आणि बुंधा यांमधील अंतर 20 मी असल्यास झाडाची उंची काढा.



रीत : समजा, AB हे न मोडलेले झाड आहे. मोडलेल्या झाडाच्या बुंध्याचा भाग आकृतीत BC ने दर्शवला असून शेंड्याचा भाग AC ने दर्शवला आहे. शेंडा A हा जमिनीवर D या ठिकाणी स्पर्श करतो.

BD = 20 मी, CD = CA

$\angle CDB = 60°$

झाडाची एकूण उंची = CB + CA = CB + CD

आता, $\triangle$ ABC या काटकोन त्रिकोणात,

$\tan < CDB = \frac{CB}{BD}$

$\therefore \tan 60^\circ = \frac{CB}{BD}$

$\therefore \sqrt{3} = \frac{CB}{20}$

$\therefore < \ B = 20\sqrt{3}$ मीटर

तसेच, $\cos < CDB = \frac{BD}{CD}$

$\therefore \cos 60^\circ = \frac{20}{CD}$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{20}{CD}$

$\therefore$ CD = 40 मी.

$\therefore$ झाडाची एकूण उंची = CB + CA = CB + CD

$= 20\sqrt{3} + 40$

$= 20(\sqrt{3} + 2)$

$= 20(2 + \sqrt{3})$

उत्तर : झाडाची उंची $20(2 + \sqrt{3})$ मीटर आहे.

6. एक पतंग उडताना जमिनीपासून 60 मी लंबउंचीपर्यंत पोहोचतो. पतंगाच्या दोऱ्याचे एक टोक जमिनीवर बांधले तेव्हा जमीन व दोरा यांच्यामध्ये 60° मापाचा कोन तयार होतो. दोरा कोठेही वाकलेला नाही असे गृहीत धरून दोऱ्याची लांबी काढा.

($\sqrt{3} = 1.73$)

रीत : समजा, आकृतीत रेख AC ने पतंगाचा दोरा दर्शवला आहे. रेख AB ही पतंगाची जमिनीपासूनची लंबउंची आहे.

AB = 60 मी.

उन्नत कोन < ACB = 60°

Δ ABC या काटकोन त्रिकोणात,

$< ACB = \sin 60° = \frac{AB}{AC}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AC}$

$\therefore AC = \frac{60 \times 2}{\sqrt{3}}$

$\therefore AC = \frac{3 \times 20 \times 2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3} \times 40 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= 40\sqrt{3}$

$= 40 \times 1.73$

$= 69.20$ मीटर

उत्तर : दोऱ्याची लांबी 69.20 मीटर आहे.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. पुढील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या उत्तराचा अचूक पर्याय निवडा :

(i) $\sin\theta \ \text{cosec}\,\theta$ = किती?

(A) 1 (B) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

उत्तर : (A) 1

(ii) $\text{cosec}\ 45°$ ची किंमत पुढीलपैकी कोणती ?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

उत्तर : (B) $\sqrt{2}$

(iii) $1 + \tan^2\theta$= किती?

(A) $\cot^2\ \theta$ (B) $cosec^2\theta$ (C) $sec^2\theta$ (D) $\tan^2\ \theta$

उत्तर : (C) $sec^2\theta$

(iv) जेव्हा आपण क्षितिजसमांतर रेषेच्या वरच्या दिशेने पाहतो, तेव्हा__ कोन होतो.

(A) उन्नत कोन (B) अवनत कोन (C) शून्य (D) रेषीय

उत्तर : (A) उन्नत कोन

2. जर $\sin\theta = \frac{11}{61}$, तर नित्यसमानतेचा उपयोग करून $\cos\theta$ ची किंमत काढा.

रीत : $\sin\theta = \frac{11}{61}$ ___ (दिले आहे)

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ __ (त्रिकोणमितीय नित्यसमानता)

$\therefore\ (\frac{11}{61})^2 + \cos^2\theta = 1$

$\frac{121}{3721} + \cos^2\theta = 1$

$\therefore\ \cos^2\theta = 1 - \frac{121}{3721}$

$= \frac{3721 - 121}{3721}$

$= \frac{3600}{3721}$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{60}{61}$ ___(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

उत्तर : $\cos\theta = \frac{60}{61}$ आहे.

3. जर $\tan\theta = 2$, तर इतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती काढा.

रीत : $\tan\theta = 2$ ___(दिले आहे)

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore 1 + (2)^2 = \sec^2\theta$

$\therefore \sec^2\theta = 1 + 4 = 5$

$\therefore \sec\theta = \sqrt{5}$ ___(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{2}$

$\therefore \cot\theta = \frac{1}{2}$

$1 + \cot^2\theta = co\sec^2\theta$

$\therefore \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + (\frac{1}{2})^2$

$= 1 + \frac{1}{4}$

$= \frac{5}{4}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{\sqrt{5}/2}$

$\therefore \ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

उत्तर : $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sec\theta = \sqrt{5}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot\theta = \frac{1}{2}$

4. जर $\sec\theta = \frac{13}{12}$, तर इतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती काढा.

रीत : $\sec\theta = \frac{13}{12}$ ___(दिले आहे)

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore 1 + \tan^2\theta = (\frac{13}{12})^2$

$\therefore 1 + \tan^2\theta = \frac{169}{144}$

$\therefore \ \tan^2\theta = \frac{169}{144} - 1$

$\therefore \ \tan^2\theta = \frac{169-144}{144}$

$= \frac{25}{144}$

$\therefore \ \tan\theta = \frac{5}{12}$ ___ (दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{5/12}$

$\therefore \cot\theta = \frac{12}{5}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{13/12}$

$\therefore \cos\theta = \frac{12}{13}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \ \sin^2\theta + (\frac{12}{13})^2 = 1$

$\therefore \ \sin^2\theta + (\frac{144}{169}) = 1$

$\therefore \ \sin^2\theta = 1 - \frac{144}{169}$

$\therefore \ \sin^2\theta = \frac{169-144}{169}$

$\therefore \ \sin^2\theta = \frac{25}{169}$

$\therefore \ \sin\theta = \frac{5}{12}$ ___ (दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{5/13}$

$\therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

उत्तर: $\sin\theta = \frac{5}{12}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$, $\cot\theta = \frac{12}{5}$

आहेत.

5. सिद्ध करा:

i. $\sec\theta\,(1-\sin\theta)(\sec\theta+\tan\theta) = 1$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \sec\theta\,(1-\sin\theta)(\sec\theta+\tan\theta)$

$= \frac{1}{\cos\theta}(1 - \sin\theta)(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta})$

___$(\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta})$

$= (\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta})(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta})$

$= \frac{(1-\sin\theta)}{\cos\theta} \times \frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$

$= \frac{(1-\sin^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

____ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= 1$

= उजवी बाजू

$\therefore \sec\theta(1 - \sin\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

ii. $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

सिद्धता :

डावी बाजू $= (\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta)$

$= (\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta})(1 - \sin\theta)$

___$(\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta})$

$$= \frac{(1 + \sin\theta)}{\cos\theta} \times (1 - \sin\theta)$$

$$= \frac{(1 - \sin^2\theta)}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

____ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$$= \cos\theta$$

= उजवी बाजू

$\therefore (\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

iii. $\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \mathrm{cosec}^2\theta$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta \,.\, \sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta . \cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta . \cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta . \cos^2\theta}$$

____ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= \sec^2\theta \,.\, \text{cosec}^2\theta$

____ $(\because \frac{1}{\sin\theta} = cosec\,\theta$ व $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta})$

$= \sec^2\theta \,.\, \text{cosec}^2\theta$

= उजवी बाजू

$\therefore \sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \text{cosec}^2\theta$

iv. $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \text{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \cot^2\theta - \tan^2\theta$

$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

___ $(\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ व $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta})$

$= \frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta} - \frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta.\,\sin^2\theta}$

$= \frac{\cos^4\theta - \sin^4\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}$

_____ $(a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2))$

$$= \frac{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$$

___($\because \frac{1}{\sin\theta} = cosec\,\theta$ व $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$)

= उजवी बाजू

$\because \cot^2\theta - \tan^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

v. $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \tan^4\theta + \tan^2\theta$

$$= (\tan^2\theta)^2 + \tan^2\theta$$

___($(a^2)^2 = a^4$)

$$= (\sec^2\theta - 1)^2 + \sec^2\theta - 1$$

___ ($1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$)

$$= \sec^4\theta - 2\sec^2\theta + \sec^2\theta - 1$$

$$= \sec^4\theta - \sec^2\theta$$

= उजवी बाजू

$$\therefore \tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$$

vi. $\frac{1}{(1-\sin\theta)} + \frac{1}{(1+\sin\theta)} = 2\sec^2\theta$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \frac{1}{(1-\sin\theta)} + \frac{1}{(1+\sin\theta)}$

$= \frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{(1-\sin^2\theta)}$

____[(a-b)(a+b) = $a^2 + b^2$]

$= \frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{\cos^2\theta}$

____ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= \frac{2}{\cos^2\theta}$ ___$(\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta})$

$= 2\sec^2\theta$

= उजवी बाजू

$$\therefore \frac{1}{(1-\sin\theta)} + \frac{1}{(1+\sin\theta)} = 2\sec^2\theta$$

$vii.\ \sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \sec^6 x - \tan^6 x$

$= (\sec^2 x)^3 - (\tan^2 x)^3$

$= (\sec^2 x - \tan^2 x)(\sec^4 x + \sec^2 x . \tan^2 x + \tan^4 x)$

___$[(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)]$

$= 1.[\sec^4 x - 2\sec^2 x . \tan^2 x + \tan^4 x + 3\sec^2 x . \tan^2 x$

___$(\because \sec^2 x = 1 + \tan^2 x)$

$= [(\sec^2 x - \tan^2 x)^2 + 3.\sec^2 x . \tan^2 x]$

$= (1)^2 + 3.\sec^2 x . \tan^2 x$

$= 1 + 3.\sec^2 x . \tan^2 x$

= उजवी बाजू

$\therefore \sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

viii. $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} = \dfrac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta + 1}$

$$= \frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} \times \frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta - 1}$$

$$= \frac{\tan\theta(\sec\theta - 1)}{\sec^2\theta - 1}$$

$$= \frac{\tan\theta(\sec\theta - 1)}{\tan^2\theta}$$

___$(\because 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta)$

$$= \frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}$$

= उजवी बाजू

$$\therefore \frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} = \frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}$$

ix. $\frac{\tan^3\theta - 1}{\tan\theta - 1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \frac{\tan^3\theta - 1}{\tan\theta - 1}$

$$= \frac{(\tan\theta - 1)(\tan^2\theta + \tan\theta + 1)}{\tan\theta - 1}$$

___$((a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2))$

$$= \tan^2\theta + \tan\theta + 1$$

$$= \tan^2\theta + 1 + \tan\theta$$

$$= \sec^2\theta + \tan\theta$$

$$___(\because 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta)$$

= उजवी बाजू

$$\therefore \frac{\tan^3\theta \ - \ 1}{\tan\theta - 1} = \ \sec^2\theta + \tan\theta$$

x. $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

सिद्धता :

डावी बाजू $= \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$

$$= \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} \times \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$$

$$= \frac{[\sin\theta - (\cos\theta - 1)[\sin\theta + (\cos\theta - 1)]}{(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2}$$

$$___(\because (a-b)(a+b) = \ a^2 + b^2)$$

$$= \frac{(\sin\theta)^2 - (\cos\theta - 1)^2}{sin^2\theta + cos^2\theta + 1 + 2\ \sin\theta\ .\cos\theta - 2\ \cos\theta - 2\ \sin\theta}$$

$$= \frac{sin^2\theta\ - (cos^2\theta - 2\ \cos\theta + 1\ )^2}{1 + 1 + 2\ \sin\theta\ .\cos\theta\ - 2\ \cos\theta - 2\ \sin\theta}$$

$$= \frac{sin^2\theta\ - cos^2\theta + \ 2\cos\theta - 1}{2 + 2\ \sin\theta\ .\cos\theta\ - 2\ \cos\theta - 2\ \sin\theta}$$

$$= \frac{1\ - cos^2\theta - \ cos^2\theta + \ 2\cos\theta - 1}{2(1 - \ \cos\theta - \sin\theta + \sin\theta .\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\cos\theta\ \ - 2\ cos^2\theta}{2[1(1 - \cos\theta) - \sin\theta(1 - \cos\theta)}$$

$$= \frac{2\cos\theta\ (1-\cos\theta\ )}{2(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta / \cos\theta}{(1-\sin\theta)/\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

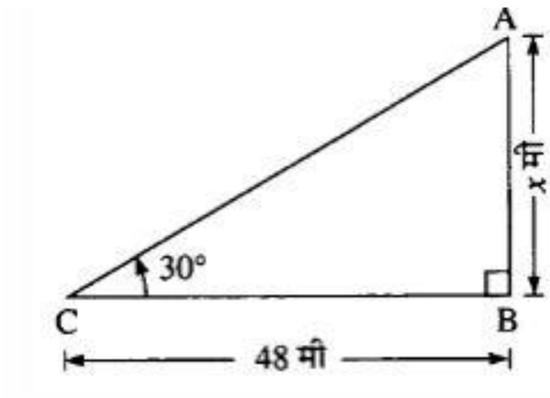
$$= \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

___($\because\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ व $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$)

= उजवी बाजू

$$\therefore\ \frac{\sin\theta\ -\ \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta\ - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

6. एक मुलगा एका इमारतीपासून 48 मीटर अंतरावर उभा आहे. त्या इमारतीच्या वरच्या टोकाकडे पाहताना त्या मुलाला 30° मापाचा उन्नत कोन करावा लागतो; तर त्या इमारतीची उंची किती ? रीत : आकृतीत, रेख AB ही इमारत असून C या ठिकाणी मुलगा उभा आहे.



< ACB हा उन्नत कोन आहे.

< ACB = 30° व BC = 48 मीटर.

समजा,

इमारत AB ची उंची x मीटर आहे.

Δ ABC या काटकोन त्रिकोणात,

$\tan \angle ACB = \tan 30° = \frac{AB}{BC}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{48}$

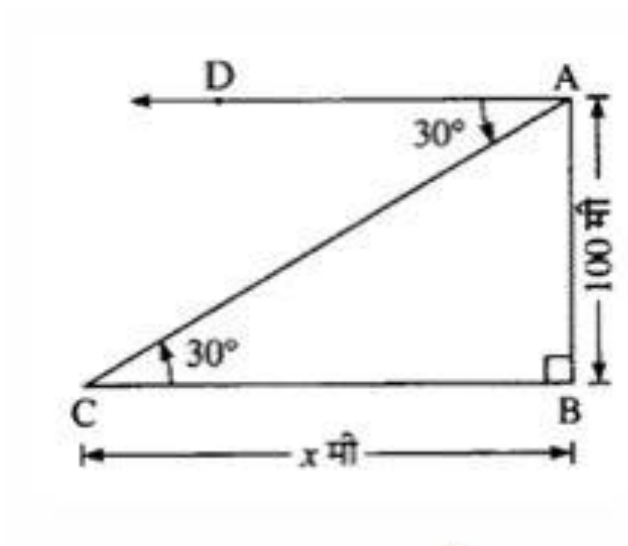
$\therefore x = \frac{48}{\sqrt{3}}$

$\therefore x = \frac{48}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ __(छेदाचे परिमेयीकरण)

$\therefore x = \frac{48 \times \sqrt{3}}{3} = 16\sqrt{3}$

उत्तर : इमारतीची उंची $16\sqrt{3}$ मीटर आहे.

7. दीपगृहावरून एका जहाजाकडे पाहताना निरीक्षकाला 30° मापाचा अवनत कोन करावा लागतो. जर दीपगृहाची उंची 100 मी असेल, तर ते जहाज दीपगृहापासून किती अंतरावर आहे?



रीत . आकृतीत, रेख AB हे दीपगृह असून, C या ठिकाणी जहाज आहे.

AB = 100 मीटर. BC हे दीपगृहापासून जहाजाचे अंतर आहे.

समजा,

BC = x मीटर.

$< DAC$ हा अवनत कोन आहे.

$< DAC = 30°$

$< DAC = < ACB$

$\therefore < ACB = 30°$ ____(व्युत्क्रम कोन)

ΔABC या काटकोन त्रिकोणात,

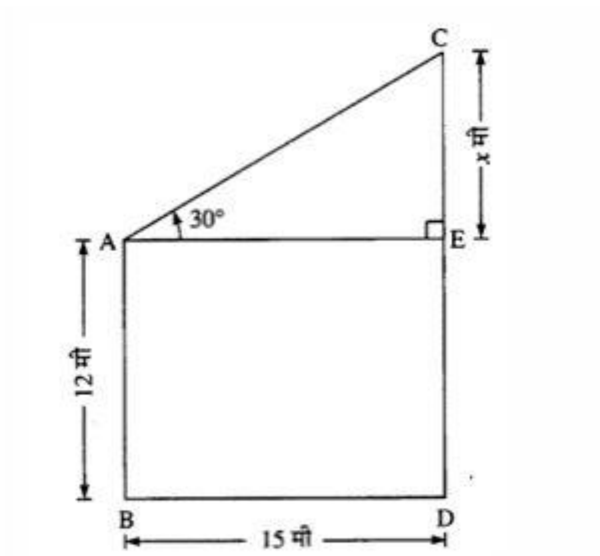
$\tan < ACB = \tan 30° = \frac{AB}{BC}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100}{x}$

$\therefore x = 100\sqrt{3}$

उत्तर :जहाजाचे दीपगृहापासूनचे अंतर $= 100\sqrt{3}$ मीटर आहे.

8. 15 मी रुंदीच्या रस्त्याच्या दुतर्फा समोरासमोर दोन इमारती आहेत. त्यांपैकी एकीची उंची 12 मी असून, तिच्या छतावरून दुसरीच्या छताकडे पाहिले असता, उन्नत कोन 30° चा होतो; तर त्या इमारतीची उंची किती?



रीत : समजा, रेख AB व रेख CD या त्या दोन इमारती आहेत.

AB = 12 मी. रस्त्याची रुंदी = BD = 15 मी

येथे, उन्नत कोन < EAC = 30° आहे.

■ ABDE हा आयत आहे.

AE = BD = 15 मी व AB = ED = 12 मी

समजा, CE = x मी.

आता, Δ AEC या काटकोन त्रिकोणात,

$\tan \angle EAC = \tan 30° = \frac{CE}{AE}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{15}$

$\therefore x = \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{5\times3}{\sqrt{3}}$

$\therefore x = \frac{5\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$

$\therefore$ CE = $5\sqrt{3}$ मी

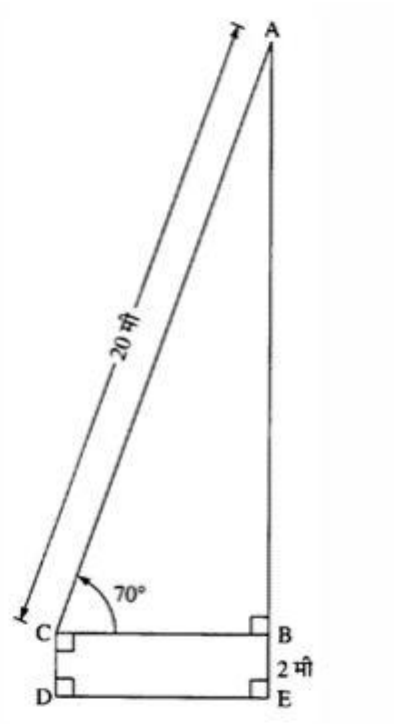
दुसऱ्या इमारतीची उंची = CE + ED

= $(5\sqrt{3} + 12)$ मीटर

उत्तर : दुसऱ्या इमारतीची उंची $12 + 5\sqrt{3}$ मीटर आहे.

9. अग्निशामक दलाच्या वाहनावर बसवलेली शिडी जास्तीत जास्त 70° मापाच्या कोनातून उचलता येते. त्या वेळी तिची अधिकात अधिक लांबी 20 मी असते. शिडीचे वाहनावरील टोक जमिनीपासून 2 मी उंचीवर आहे; तर शिडीचे दुसरे टोक जमिनीपासून जास्तीत जास्त किती उंचीवर पोहोचवता येईल ?

(sin 70° ≈ 0.94)



रीत : रेख CB ही वाहनावर ठेवलेली शिडी आहे. रेख DE ही जमीन आहे. शिडीचे वाहनावरील B हे टोक जमिनीपासून (E बिंदूपासून) 2 मी उंचीवर आहे.

रेख BE अग्निशामक वाहन आहे.

∴ BE = 2 मी.

रेख AC ही 70° मापाच्या कोनातून उचललेली शिडी आहे.

AC = 20 मी $\angle$ BCA = 70°

Δ ABC या काटकोन त्रिकोणात,

sin $\angle$ ACB = sin 70° = $\frac{AB}{AC}$

∴ 0.94 = $\frac{AB}{20}$

∴ AB = 18.80 मी

शिडीच्या दुसऱ्या टोकाची जमिनीपासूनची उंची

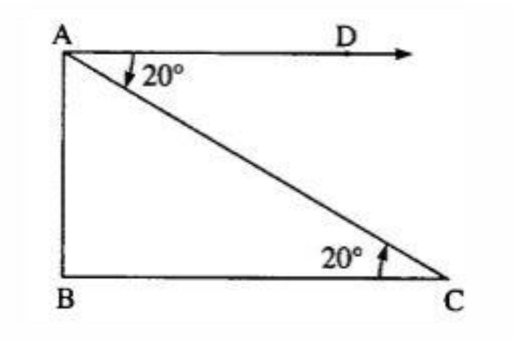
= AB + BE

= 18.80 +2

= 20.80 मी

उत्तर : शिडीचे दुसरे टोक जमिनीपासून जास्तीत जास्त 20.80 मीटर उंचीवर पोहोचवता येईल.

10. आकाशात उडत असलेल्या विमानाच्या चालकाने विमानतळावर विमान उतरवण्यास सुरुवात करताना 20° मापाचा अवनत कोन केला; तेव्हा विमानाचा सरासरी वेग ताशी 200 किमी होता. ते विमान 54 सेकंदांत विमानतळावर उतरले. विमानतळावर उतरण्यास वळण्याच्या क्षणी ते विमान जमिनीपासून किती उंचीवर होते ? (sin 20° ≈ 0.342)



रीत : आकाशात A या ठिकाणी विमान होते.

BC हा विमानतळाचा पृष्ठभाग आहे.

AC या मार्गाने विमान B आकाशातून विमानतळावर उतरले.

$\angle$ DAC हा अवनत कोन आहे. $\angle DAC = 20°$

$\angle DAC = \angle ACB$ __(व्युत्क्रम कोन)

$\angle ACB = 20°$

विमान 1 तासात 200 किमी अंतर कापते. ___(दिले आहे)

∴ विमानाने 54 सेकंदांत कापलेले अंतर = $\frac{54 \times 200}{3600}$

__(1 तास = 60 मिनिटे = 3600 सेकंद)

= 3 किमी

विमानाने 54 सेकंदांत AC हे अंतर कापले.

∴ AC = 3 किमी

$<$ ACB या काटकोन त्रिकोणात,

$\sin < ACB = \sin 20° = \frac{AB}{AC}$

$0.342 = \frac{AB}{3}$ &

∴ AB = 1.026 किमी ∴ AB = 1026 मीटर

उत्तर : विमानतळावर उतरण्यास वळण्याच्या क्षणी ते विमान जमिनीपासून 1026 मीटर उंचीवर होते